CHI HA PAURA DEI NUMERI COMPLESSI?

SULLA MATEMATICA DEL SUONO

CARMINE EMANUELE CELLA

SOMMARIO. Questo piccolo documento cerca di presentare in modo intuitivo gli strumenti matematici usati nell'ambito della teoria dei segnali ed è da intendersi come compendio. L'approccio è piuttosto informale e punta, inoltre, a mostrare l'importanza dei numeri complessi in molti campi della matematica.

1. INTRODUZIONE

Uno dei grandi privilegi che offre la matematica è che essa può essere usata per spiegare parti del mondo *reale*. È sempre difficile dire, da un punto di vista filosofico, cosa sia una spiegazione *esatta*; in effetti lo stesso criterio di esattezza è sfuggevole. Alcuni aspetti della realtà, tuttavia, si prestano forse meglio di altri ad essere *descritti* mediante il linguaggio simbolico della matematica; uno di questi aspetti è sicuramente il suono.

Da un punto di vista fisico, il suono è una vibrazione regolare dell'aria causata, a sua volta, da un corpo in vibrazione. Esistono suono semplici (chiamati *sinusoidi*) e suoni complessi composti da una collezione di suoni semplici (chiamata *spettro*).

Un suono puro è caratterizzato da attributi quali frequenza, ampiezza e fase; la frequenza è, intuitivamente, il numero di vibrazioni al secondo che un oggetto può avere ed è misurata in hertz (Hz) o cicli al secondo. Le frequenze basse sono percepite come suoni gravi, mentre quelle alte come suoni acuti; l'orecchio umano può sentire suoni con frequenza compresa, all'incirca, tra 16 Hz e 20000 Hz.

1.1. **La corda vibrante.**

Quando un suono è prodotto da uno strumento musicale, esso è di tipo composto e i suoni puri che lo costituiscono vengono chiamati *armonici*: la ragione di questo nome sarà chiarita a breve.

Si immagini una corda di lunghezza L, ancorata alle due estremità, pizzicata al suo centro con una certa energia. Tale corda comincerà a vibrare ad una certa frequenza f; la fisica spiega, tuttavia, che essa vibrerà anche alla metà della sua lunghezza $\frac{L}{2}$ con frequenza $2f$, al terzo della sua lunghezza $\frac{L}{3}$ con frequenza $3f$ e così via. Il suono prodotto dalla corda, allora, sarà dato dalla *somma* delle vibrazioni di tutti i suoi segmenti (detti *modi* di vibrazione) secondo la seguente legge fisica[1]:

$$L + \frac{L}{2} + \frac{L}{3} + \frac{L}{4} + \frac{L}{5} + \ldots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n}}. \tag{1}$$

[1] Il simbolo $\sum$ è detto *sommatoria* ed indica la somma di vari elementi in un determinato intervallo; il simbolo $\prod$ (usato successivamente) è chiamato invece *produttoria* ed indica la loro moltiplicazione.

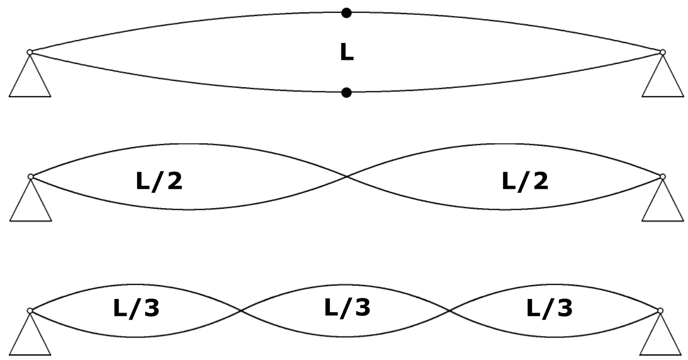

FIGURA 1. La corda vibrante.

L'equazione 1, chiamata *legge armonica*, organizza la struttura dei suoni prodotti dagli strumenti musicali e dalla voce umana. Essa afferma che la nota prodotta da uno strumento non è fatta da un solo suono bensì di un insieme di suoni (detti appunto *armonici*) con frequenze determinate da rapporti interi. Tra i primi cinque armonici prodotti da questa legge, come si vede dalla figura 2, si trovano i gradi più importanti di una scala, ovvero la fondamentale, la quinta e la terza.

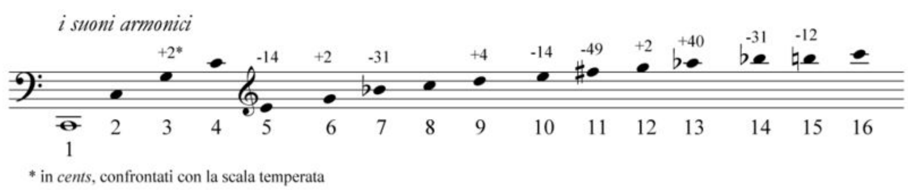

FIGURA 2. Serie armonica costruita sulla nota *do*.

1.2. **Trasformazioni matematiche.** Una delle grandi possibilità offerte dalla matematica sta nella capacità di dire lo stesso concetto in modi *diversi*. L'utilità di tale capacità sta nel fatto che ciascun modo mette in evidenza un diverso *aspetto* del concetto che si sta descrivendo. Ad esempio, la legge armonica presentata sopra può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \tag{2}$$

se $x = L$; a sua volta, questa formulazione può essere riscritta come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \tag{3}$$

se $x = 1$. Infine, ponendo $a_n = \frac{1}{n}$, la stessa equazione può essere scritta come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n. \tag{4}$$

La versione data nell'equazione 4 ha una forma speciale chiamata *polinomio*. I polinomi sono uno strumento matematico di fondamentale importanza per la descrizione del suono e della musica; la sezione seguente darà una descrizione elementare di tale strumento.

2. Polinomi

I polinomi sono speciali tipi di *funzioni di una variabile*, composti da una somma di termini di grado crescente moltiplicati da coefficienti:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}. \tag{5}$$

Sebbene la definizione precisa del concetto di funzione esuli dallo scopo di questo breve documento, si può pensare ad una funzione come ad una *trasformazione* tra valori: applicando una funzione ad un valore, esso viene trasformato in un altro in base ad alcune proprietà.

I polinomi possono essere messi in una forma semplificata attraverso la *fattorizzazione*; tale forma prevede la conversione dalla somma alla moltiplicazione dei termini:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x - b_0)(x - b_1) \ldots (x - b_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - b_i) \tag{6}$$

con il conseguente cambio di coefficienti da a_i a b_i. In altri termini, un polinomio costituito dalla somma di n termini con grado crescente, si può scrivere come moltiplicazione di n termini di primo grado[2].

Sono detti *zeri* del polinomio, i valori della variabile per cui il polinomio si annulla; spesso può essere utile sapere quali sono gli zeri di un polinomio per comprendere meglio la sua natura. Tra i vari polinomi, quelli di secondo grado (ovvero $p(x) = ax^2 + bx + c$) sono speciali poichè hanno una formula risolutiva per trovare gli zeri:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

Il polinomio di secondo grado $x^2 + 1 = 0$, tuttavia, è molto problematico, poichè ha tra i suoi zeri un valore molto speciale: $x = \sqrt{-1}$. Questo valore, comunemente chiamato *unità immaginaria* ed indicato con $i = \sqrt{-1}$, non ha una rappresentazione *possibile* nei numeri reali (ovvero non è possibile disegnare i su una retta in cui sono posizionati altri numeri reali). Ciò ha portato alla definizione di una speciale varietà di numeri, detti *complessi*, che verranno descritti nella sezione 6.

[2] Un esempio di tale scomposizione è ad esempio: $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$. Il calcolo dei coefficienti b_i della forma fattorizzata è un argomento complesso e non verrà affrontato in questa sede.

3. Il numero di Nepero

Un particolare numero irrazionale[3], detto numero di *Nepero* ed indicato con $e = 2.718281\ldots$, ha un grande valore in matematica. Uno dei motivi per cui questo numero è così importante, è che esso può essere definito attraverso un polinomio:

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2.718281\ldots \tag{8}$$

dove il simbolo ! indica il *fattoriale* di un numero, ovvero: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; ad esempio: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Tale numero ha, in effetti, una definizione generalizzabile per qualsiasi esponente:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \boxed{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{9}$$

Come si vedrà tra breve, il numero di Nepero sta alla base di tanti concetti matematici fondamentali per la descrizione del suono.

4. Angoli e lati: trigonometria

Come visto nella sezione 1, non tutti i suoni sono composti. Esistono infatti suoni puri chiamati sinusoidi: essi sono definiti, semplificando molto, mediante l'uso di triangoli rettangoli. Un'importante parte della matematica, la *trigonometria*, si è occupata di studiare i rapporti tra angoli, cateti ed ipotenusa in un triangolo rettangolo.

La sinusoide, seguendo le lettere indicate in figura 3, è definita attraverso le seguenti relazioni:

$$sin(\theta) = \frac{b}{H} \tag{10}$$

$$cos(\theta) = \frac{a}{H} \tag{11}$$

$$tan(\theta) = \frac{b}{a}. \tag{12}$$

Sia *sin* (sinusoide), *cos* (cosinusoide) che *tan* (tangente) sono funzioni di una variabile ed è possibile dunque dire che la sinusoide (ovvero il suono puro) è definita matematicamente attraverso il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, come mostrato nelle equazioni 10 e 11. Tra le varie relazioni trigonometriche ce ne sono alcune notevli, ad esempio:

[3]Per numero *irrazionale* si intende un numero che non è esprimibile attraverso una frazione (*ratio*) e che dunque è caratterizzato da una serie infinita di decimali; un esempio notevole è il numero $\pi = 3.1415\ldots$

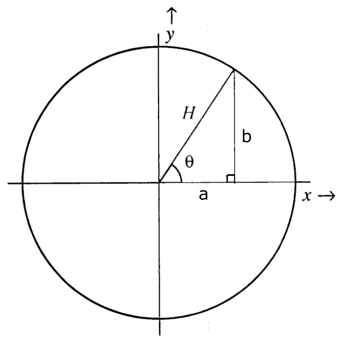

FIGURA 3. La circonferenza trigonometrica.

$$\begin{aligned}
sin^2(\theta) + cos^2(\theta) &= 1 && (13)\\
sin(-\theta) &= -sin(\theta) && (14)\\
cos(-\theta) &= cos(\theta) && (15)\\
sin(2\theta) &= 2sin(\theta)cos(\theta) && (16)\\
cos(2\theta) &= cos^2(\theta) - sin^2(\theta) && (17)\\
sin(\theta + \gamma) &= sin(\theta)cos(\gamma) + cos(\theta)sin(\gamma). && (18)
\end{aligned}$$

La sezione seguente mostrerà come sia possibile, mediante gli strumenti mostrati fin'ora (polinomi, numero di Nepero e trigonometria), definire un'identità di fondamentale importanza per molti campi della matematica.

5. L'identità di Eulero

Esiste una formula meravigliosa che mette in relazione la definizione di *sin* e *cos* ed il numero di Nepero attraverso una rappresentazione polinomiale. Tale formula ha una portata concettuale enorme perchè riesce a collegare vari campi della matematica in maniera molto diretta.

Le funzioni *sin* e *cos*, già definite nella sezione precedente, possono essere espresse anche attraverso un polinomio. Tale espressione passa attraverso la cosiddetta *espansione di Taylor* (che non verrà esaminata in dettaglio in questa sede):

$$sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \tag{19}$$

$$cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \tag{20}$$

Come si ricorderà, anche il numero di Nepero si può esprimere in forma polinomale (cfr. sezione 3); in particolare anche i suoi elevamenti a potenza si possono rappresentare rappresentare come polinomi:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \tag{21}$$

e poichè $i^2 = -1$, come mostrato nella sezione 2, saranno allora valide le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{e^{i\theta}} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots && (22)\\ &= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right] && (23)\\ &= \boxed{\mathbf{cos}(\theta) + \mathbf{i} \cdot \mathbf{sin}(\theta)}. && (24) \end{aligned}$$

L'equazione 24 è comunemente conosciuta come identità di *Eulero* ed è un caposaldo della matematica[4] ; essa permette, tra le altre cose, di definire in un modo ancora diverso *sin* e *cos* grazie all'uso del numero di Nepero:

$$cos(\theta) = \frac{[cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)] + [cos(\theta) - i \cdot sin(\theta)]}{2} = \frac{2cos(\theta)}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{25}$$

$$sin(\theta) = \frac{[cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)] - [cos(\theta) - i \cdot sin(\theta)]}{2i} = \frac{2isin(\theta)}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{26}$$

Come mostrato nell'equazione 13, $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ e dunque $sin^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta)$; per questa ragione la relazione di Eulero può essere scritta anche nei seguenti modi:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= cos(\theta) + \sqrt{-1sin^2(\theta)}\\ &= cos(\theta) + \sqrt{-1(1 - cos^2(\theta))}\\ &= cos(\theta) + \sqrt{cos^2(\theta) - 1}. \end{aligned} \tag{27}$$

6. I numeri complessi

Come visto nella sezione 2, il polinomio di secondo grado $x^2 + 1 = 0$ ha tra le sue soluzioni il valore $i = \sqrt{-1}$. Tale valore non è rappresentabile su una retta in cui sono posizionati altri numeri reali ed è stato perciò chiamato (da Cartesio) *unità immaginaria*.

Per rappresentare tale unità, è stato allora necessario introdurre un piano in cui un asse è costituito da numeri reali mentre l'altro da *rapporti* rispetto ad i (ovvero da numeri reali moltiplicati per i); tale piano, introdotto da Gauss e detto *piano complesso*, è alla base di una varietà di numeri detti appunto complessi.

I numeri complessi si intendono formati da un parte immaginaria (ovvero moltiplicata per i) e da una parte reale: $z = a + ib$ (come rappresentato in figura 4); tali numeri sono centrali nella definizione del **teorema fondamentale dell'algebra**, che asserisce che qualunque equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni nel piano complesso, non necessariamente distinte.

Grazie alle definizioni trigonometriche date nella sezione 4 ed alla identità di Eulero descritta nella sezione 5, inoltre, è possibile mostrare come un numero complesso possa essere scritto in modi diversi ma correlati; questa possibilità chiarisce, in effetti, la potenza espressiva di tale varietà di numeri e la loro capacità di collegare vari rami della matematica:

[4]È facile dimostrare, inoltre, che vale anche $e^{-i\theta} = cos(\theta) - i \cdot sin(\theta)$.

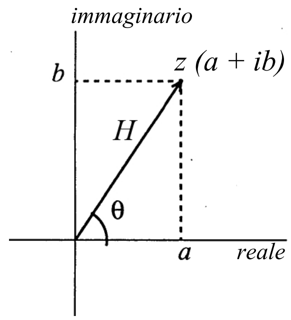

FIGURA 4. Il piano complesso.

$$
\begin{aligned}
z &= a + ib && (28)\\
&= H[cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)] && (29)\\
&= H \cdot e^{i\theta} && (30)
\end{aligned}
$$

dove $a = H \cdot cos(\theta)$ e $b = H \cdot sin(\theta)$. L'equazione 28 è detta forma *cartesiana* del numero complesso, l'equazione 29 forma *trigonometrica*, mentre l'equazione 30 forma *esponenziale*.

6.1. **Aritmetica dei numeri complessi.** Come per tutte le altre varitetà di numeri, anche per i complessi è possibile definire un'aritmetica. Le seguenti definizioni mostrano alcune operazioni elementari su numeri complessi quali addizione, sottrazione e così via:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Addizione}: (a+ib)+(c+id) &= (a+c)+i(b+d) && (31)\\
\textbf{Sottrazione}: (a+ib)-(c+id) &= (a-c)+i(b-d) && (32)\\
\textbf{Moltiplicazione}: (a+ib)(c+id) &= (ac-bd)+i(ad+bc) && (33)\\
\textbf{Divisione}: (a+ib)/(c+id) &= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}. && (34)
\end{aligned}
$$

6.2. **Analisi dei segnali.** I numeri complessi sono estrememanete utili nell'analisi dei segnali periodici e che variano in modo sinusoidale nel tempo. Il valore assoluto $|z|$ di un numero complesso può essere infatti interpretato come l' *ampiezza* di un segnale, mentre il suo argomento $\angle z$ come la fase:

$$
|z| = \sqrt{a^2+b^2} = z\overline{z} = H, \quad \angle z = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (35)
$$

dove $\overline{z} = (a - ib)$ è detto *coniugato* di z. Per tale ragione, il numero complesso $e^{i\theta}$ è detto *sinusoide complessa* (si ricordi che in effetti tale numero è formato dalla somma tra una sinusoide ed una cosinusoide). Si noti, inoltre, che:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e^{i\theta}e^{-i\theta}} &= \mathbf{e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}} = \\
[cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)][cos(\theta) - i \cdot sin(\theta)] &= \\
cos^2(\theta) - i \cdot sin(\theta)cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)cos(\theta) + sin^2(\theta) &= \mathbf{1}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Nella sezione successiva si mostrerà come i numeri complessi siano molto importanti anche nell'analisi di Fourier, mediante la quale un generico segnale tempo-invariante viene scomposto in una somma di infinite sinusoidi complesse (ovvero rappresentate come singoli numeri complessi).

7. La serie di Fourier

La serie di Fourier è una rappresentazione di una funzione periodica mediante combinazione lineare di funzioni sinusoidali; deve il suo nome al matematico francese Jean-Baptiste Fourier che per primo studiò sistematicamente queste serie infinite. L'idea generale è quella di scomporre un segnale periodico $f(t)$ in una somma pesata di sinusoidi:

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k sin(k\omega t + \phi_k)} \tag{37}$$

dove A_k è l'ampiezza della k-esima componente sinusoidale di $f(t)$, ϕ_k la sua fase e ω è la frequenza fondamentale moltiplicata per 2π. Grazie alle relazioni trigonometriche descritte nella sezione 4, si avrà:

$$A \cdot sin(k\omega t + \phi_k) = A[sin(k\omega t)cos(\phi_k) + cos(k\omega t)sin(\phi_k)] \tag{38}$$
$$= A \cdot sin(\phi_k)cos(k\omega t) + A \cdot cos(\phi_k)sin(k\omega t) \tag{39}$$
$$= a \cdot cos(k\omega t) + b \cdot sin(k\omega t) \tag{40}$$

dove $a = A \cdot sin(\phi_k)$ e $b = A \cdot cos(\phi_k)$. Pertanto, la scomposizione di Fourier si potrà anche scrivere come:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)] \tag{41}$$

in cui a_0 è il valore della serie per $k = 0$. Tale valore viene messo in evidenza per comodità di calcolo: in questo modo lo zero viene trattato separatamente (si vedrà a breve l'utilità di questo artificio).

In altri termini, l'equazione 41 (detta forma trigonometrica della serie di Fourier) è una formula di *sintesi* ed afferma che è sempre possibile ricostruire un qualunque segnale periodico mediante una somma di seni e coseni moltiplicati per gli opportuni coefficienti a_k e b_k.

7.1. Analisi eterodina.

Il valore dei coefficienti della serie di Fourier, si può ottenere mediante una fase di *analisi* che consiste nello studiare *l'energia* presente in un segnale ad una data frequenza; ciò è possibile grazie alla moltiplicazione contemporanea di un segnale nel tempo con una sinusoide ed una cosinusoide alla stessa frequenza. Nello specifico, i coefficienti a_k e b_k si possono determinare nel modo seguente:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)cos(k\omega t)dt \tag{42}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)sin(k\omega t)dt. \tag{43}$$

Questo processo, detto *analisi eterodina*, consente in effetti di *estrarre* l'energia di un segnale ad una determinata frequenza.

7.2. **Continuo e discreto.** I simboli $\int$ e dt usati nelle equazioni precedenti sono chiamati rispettivamente *integrale definito* e *differenziale* di una funzione: sebbene spiegare in dettaglio il loro significato esuli dallo scopo di questo documento, sarà opportuno spendere qualche parola su di essi.

L'integrale definito è, in sintesi, la somma dei valori di una funzione su tutti i punti in cui essa esiste all'interno di un dato intervallo. Concettualmente, dire *tutti* i punti non è affatto semplice: si immagini, ad esempio, se la funzione su cui applicare l'integrale sia basata sul tempo. Cosa significa *tutti* i punti del tempo? Dati gli istanti del tempo t_1 e t_2, teoricamente, è sempre possibile individuare un altro istante t_x a metà tra essi; ovviamente, poi, questo processo si può ripetere all'infinito. È per questo che in matematica si è ricorsi al concetto di differenziale: esso è la più piccola suddivisione possibile di una funzione. In altri termini, tra il punto p_1 ed il punto $p_1 + dp$ non è possibile individuare altri punti, poichè dp è infinitesimo.

In ultima analisi, allora, l'espressione $\int_n^m f(x)dx$ è la *grande somma* di tutte le più *piccole quantità* della funzione $f(x)$ nell'intervallo compreso tra n ed m. Se si confronta tale definizione con quella data nella sezione 1 per il simbolo $\sum$ (sommatoria), si noterà che tra essi non vi è una grande differenza concettuale: indicano entrambi la somma di quantità. L'integrale, tuttavia, opera su funzioni *continue*, ovvero esistenti in tutti i punti compresi in un certo intervallo; la sommatoria, invece, opera su funzioni *discrete*, ovvero definite solo in punti ben determinati. Per maggiori informazioni su questi concetti, basati sull'uso degli *infinitesimi* come elementi del calcolo, sarà necessario consultare un testo di analisi matematica.

7.3. **Forma esponenziale.** La seguente parte della sezione mostrerà come, riscrivendo e manipolando la serie dell'equazione 41, sia possibile arrivare ad una versione molto semplice di essa che utilizza i numeri complessi. Nella sezione 5 si è visto come sia possibile scrivere le funzioni *sin* e *cos* in forma esponenziale (cfr. equazioni 26 e 25). Sarà allora possibile scrivere l'equazione 41 anche nel seguente modo:

$$\begin{align} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\frac{e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}}{2} + b_k\frac{e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}}{2i}\right] \tag{44}\\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k e^{ik\omega t}}{2} + \frac{a_k e^{-ik\omega t}}{2} - \frac{ib_k e^{ik\omega t}}{2} + \frac{ib_k e^{-ik\omega t}}{2}\right]. \tag{45}\end{align}$$

Sarà poi utile *separare* la metà positiva della serie da quella negativa, ottenendo:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k e^{ik\omega t}}{2} - \frac{ib_k e^{ik\omega t}}{2}\right] + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{a_{-k} e^{ik\omega t}}{2} + \frac{ib_{-k} e^{ik\omega t}}{2}\right] \tag{46}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ik\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})e^{ik\omega t} \tag{47}$$

$$= \boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}} \tag{48}$$

dove:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k < 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_k) & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Si noti come la relazione tra i coefficienti c_k della forma esponenziale e i coefficienti a_k e b_k della forma trigonometrica sia data da:

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots \tag{49}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{per } k = 1, 2, \dots. \tag{50}$$

L'equazione 48 è comunemente nota come *forma esponenziale* della serie di Fourier ed è contraddistinta da una intrinseca semplicità rispetto alla forma trigonometrica. Essa afferma, in ultima analisi, che qualsiasi segnale periodico può essere ricostruito da una somma di coeffiecienti moltiplicati per sinusoidi complesse. Anche in questo caso si tratta di una formula di sintesi, che prevede una fase di analisi per determinare i valori dei coefficenti c_k:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-ikt}dt \tag{51}$$

7.4. **Segnali con periodo qualsiasi.** Tutta l'esposizione fatta fin'ora, presuppone che i segnali decomposti attraverso la serie di Fourier siano periodici rispetto a 2π. In effetti, è possibile generalizzare la serie di Fourier per segnali con periodo qualsiasi nel seguente modo:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + b_k sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right] \tag{52}$$

dove il periodo sarà appunto $2L$ ed i coefficienti a_k e b_k saranno dati da:

$$a_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt \tag{53}$$

$$b_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt. \tag{54}$$

L'importanza di questa generalizzazione a periodi qualsiasi sarà compresa pienamente nella prossima sezione.

8. La trasformata di Fourier

L'equazione 52 mostra come sia possibile scomporre un segnale di periodo qualsiasi in una somma pesata di sinusoidi e cosinusoidi. In effetti, tale scomposizione si può estendere anche a segnali non periodici.

Un segnale non periodico, puó essere sempre pensato come un segnale periodico con periodo t tendente ad infinito ($t \to \infty$). La serie di Fourier può essere allora generalizzata a segnali non periodici mediante la sostituzione della sommatoria con l'integrale, divenendo *trasformata*:

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt} \tag{55}$$

la cui *antitrasformata* risulta essere:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df. \tag{56}$$

Si noti come la trasformata assomigli al calcolo dei coefficienti c_k descritto nella formula 51, con f al posto di k. In definitiva, dunque, la differenza sostanziale tra la serie e la trasformata di Fourier sta nel fatto che mentre la prima scompone il segnale in una somma discreta di armoniche, tutte multiple di una armonica fondamentale che ha frequenza pari a quella del segnale scomposto, la seconda lo scompone in una somma *continua* di armoniche le cui frequenze possono essere tutti i numeri reali. Di conseguenza mentre la serie riesce a scomporre segnali di tipo periodico, la trasformata può operare su segnali di qualsiasi tipo.

8.1. **Frequenze negative.**

La trasformata di Fourier opera in effetti su tutti i numeri reali; di conseguenza essa è definita anche per frequenze *negative*. Ciò può apparire assurdo in un primo momento, ma è una conseguenza formale della definizione della trasformata stessa.

Per ciascun valore di frequenza f_0 esistente nella realtà ($f_0 > 0$), esistono due valori per la trasformata: $+f_0$ e $-f_0$. È tuttavia possibile sommare i contributi relativi alle frequenze positive e negative per ottenere le componenti sinusoidali del segnale che utilizzano solo le frequenze positive esistenti nella realtà.

8.2. **La trasformata discreta (DFT).**

Sebbene la definizione della trasformata data nell'equazione 55 sia matematicamente corretta, nella pratica essa non è usata. La ragione di ciò sta nel fatto che i segnali di cui ci si occupa sono generalmente di tipo *digitale* e dunque discreti poichè costituiti da campioni[5]. È dunque norma utilizzare la cosiddetta *trasformata discreta di Fourier (DFT)*, definita come segue:

$$DFT(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{k}{N} n} \tag{57}$$

[5]Per un'introduzione sui segnali digitali si vedano i testi in bigliografia.

la cui antitrasformata è definita come:

$$DFT(k)^{-1} = x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} DFT(k)e^{i2\pi\frac{k}{N}n}. \tag{58}$$

Una trattazione esaustiva della DFT e delle sue proprietà esula dagli scopi di questo documento; nell'analisi computazionale dei segnali, inoltre, entrambe le trasformate vengono realizzate mediante un algoritmo veloce chiamato *fast Fourier transform (FFT)* che non verrà discusso oltre.

Le equazioni 57 e 58 rappresentano una versione *pratica* della teoria di Fourier e si prestano dunque ad essere implementate in un linguaggio di programmazione; la sezione 10 mostra tale implementazione in C++.

9. Conclusioni

La matematica è uno strumento potente per descrivere aspetti della realtà. In questo breve documento si è visto come, in effetti, essa si presti bene a descrivere la teoria che sta alla base del fenomeno fisico del suono.

Tale teoria si fonda su oggetti matematici quali polinomi, numero di Nepero, numeri complessi e serie di Fourier. In particolare, si è visto come i numeri complessi siano uno strumento di straordinaria potenza in grado di collegare agevolmente rami diversi della matematica. Probabilmente, l'unico problema legato all'uso dei numeri complessi è il loro nome: essi, infatti, sono complessi ma tutt'altro che *complicati*. Nella maggior parte dei casi, infatti, permettono di semplificare un problema migliorandone così la sua comprensione.

10. Appendice A

Il seguente listato in C++ mostra l'implementazione della trasformata discreta di Fourier (DFT) descritta nella sezione 8 sia nella versione basata su seni e coseni che nella versione basata su esponenziali.

Listing 1. Implementazioni della DFT

```
// dftComparison.cpp - DFT implementations
//

#include <iostream>
#include <complex>
#include <vector>
#include <cmath>

using namespace std;

const float PI = 4. * atan (1.);
const float TWOPI = 8. * atan (1.);
const int WINDOWSIZE = 16;

typedef complex <float> Complex;

inline void dftExp (const vector<float>& data, vector <Complex>& cplx)
    {
  Complex j (0, 1);
  float omega  = 0.;
```

```
  int N = data.size ();

  for (int n = 0; n < N; ++n) {
    cplx[n] = 0;
    for (int k = 0; k < N; ++k) {
      omega = TWOPI * (float) n / N * (float) k;
      cplx[n] += data[k] * std::exp (-j * omega);
    }
  }
}

inline void dftSinCos (const vector<float>& data, vector <Complex>&
    cplx) {
  float omega = 0.;
  int N = data.size ();

  for (int n = 0; n < N; ++n) {
    cplx[n] = 0;
    for (int k = 0; k < N; ++k) {
      omega = TWOPI * (float) n / N * (float) k;
      cplx[n] += Complex (cos (omega), -sin (omega)) * data[k];
    }
  }
}

int main () {
  vector <Complex> t1 (WINDOWSIZE);
  vector <Complex> t2 (WINDOWSIZE);

  vector <float> v (WINDOWSIZE, 0);

  // input data
  for (int i = 0; i < 16; ++i) {
    v[i] =  1 + i;
  }

  // transforms
  dftExp (v, t1);
  cout << "transform 1 (exponential): " << endl;
  for (int i = 0; i < WINDOWSIZE; ++i) {
    cout << t1[i] << endl;
  }
  dftSinCos (v, t2);
  cout << "\ntransform 2 (sin/cos): " << endl;
  for (int i = 0; i < WINDOWSIZE; ++i) {
    cout << t2[i] << endl;
  }
  return 0;
}

// EOF
```

Riferimenti bibliografici

[1] C. E. Cella. *Cos'è la musica elettroacustica?* www.carminecella.com, 2003.
[2] C. E. Cella. *Appunti sul filtro 1-polo*. www.carminecella.com, 2009.
[3] C. E. Cella. *On symbolic representations of music*. PhD thesis, Università di Bologna, www.carminecella.com, 2011.
[4] R. Moore. *Elements of computer music*. Prentice Hall - Englewood cliffs, New Jersey 07632, 1990.
[5] M. Puckette. *The Theory and Technique of Electronic Music*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
[6] J. Strawn and F. Moore. *Digital audio signal processing: an anthology*. Computer music and digital audio series. W. Kaufmann, 1985.

IRCAM, 1, place I. Stravinsky - 75004 Paris, France