ORTOGONALITÀ DELLE RAPPRESENTAZIONI ESACORDALI

CARMINE EMANUELE CELLA

1. Necessità di una riduzione

Nel momento in cui ci si accinge a gestire un insieme più o meno grande di note, è fondamentale capire quali siano le proprietà di tale insieme per poter operare su esso in piena coscienza. Ad esempio, volendo usare gruppi di sei note potrebbe essere importante sapere *quanti* gruppi formati da tale numero di note esistono all'interno del totale cromatico nel sistema temperato. *Contare*, dunque, è un'operazione di fondamentale importanza per inquadrare meglio la totalità del materiale a disposizione. Tuttavia, lavorare con un numero troppo alto di insiemi non permette di utilizzare criteri di organizzazione e catalogazione significativi. Per questo motivo è necessario utilizzare delle **regole di riduzione** del materiale, basate sulla definizione di *proprietà comuni* tra gli insiemi considerati[1]. La difficoltà intrinseca della riduzione sta nella mancanza di criteri validi per la scelta di tali proprietà. Tutti ad esempio sarebbero d'accordo nell'affermare che, data la regolarità del sistema temperato, un accordo di do maggiore è *equivalente* ad uno di mi maggiore a meno di una operazione che prende il nome di *trasposizione* (definibile in modo formale). Per contro, sarebbe più complesso sostenere che un accordo di do maggiore è *equivalente* ad uno di do minore a meno di una qualche operazione. Nel primo caso allora si può dire che gli *accordi maggiori* sono **equivalenti per trasposizione**. Ciò significa che essi sono lo *stesso* accordo e dunque godono delle *stesse* proprietà (ad esempio, sono entrambi formati da un intervallo di terza maggiore e da uno di terza minore sovrapposti) e si dicono dunque equivalenti. É possibile allora *ridurre* il numero degli accordi di tre note elencando solo un *esempio* per ogni tipo di accordo equivalente: invece di avere i 12 accordi maggiori, si avrà un accordo

[1]L'organizzazione in base a proprietà comuni è infatti una capacità propria dell'uomo, attraverso la quale egli passa dal particolare al generale e mette in atto quel complesso processo cognitivo che va sotto il nome di *astrazione*. Da un punto di vista puramente algebrico, ridurre secondo proprietà comuni si dice *quozientare*.

di *tipo* maggiore, uno di *tipo* minore e così via; l'insieme degli accordi maggiori costituirà allora una *classe*[2].

2. Accordi equivalenti per trasposizione

Per sapere quanti accordi si possono formare usando un certo numero di note estratte da un *alfabeto* di 12 note diverse (il sistema temperato) è possibile applicare la formula dei *coefficienti binomiali* [3]:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1}$$

Con tale formula è possibile calcolare quante diverse combinazioni di k elementi si possono creare se si stanno combinando n elementi diversi; volendola applicare all'interno del sistema temperato si dovrà porre $n = 12$ (poichè questo è il numero dei semitoni). Per calcolare il numero di accordi di 6 note, ad esempio, si dovrà porre $k = 6$, ottenendo:

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot (12-6)!} = \frac{479001600}{720 \cdot 720} = 924 \tag{2}$$

Esistono infatti 924 accordi differenti composti da sei note diverse. Tuttavia, molti di questi accordi appartengono in realtà alla stessa *classe* a meno di una operazione: la *trasposizione*. Si supponga infatti di aver identificato tutti i 924 accordi di 6 note (chiamati *esacordi*): scorrendoli uno dopo l'altro si noterà che alcuni sono *praticamente* uguali e differiscono solo per trasposizione (ad esempio {DO, RE,MI, FA, SOL, LA} e {MI, FA#, SOL#, LA, SI, DO#}). In effetti, ciò che è stato preso in esame non è tanto il nome delle note che compongono ciascun esacordo, quanto piuttosto *gli intervalli che separano tali note*. Si è notato cioè che l'operazione di trasposizione **preserva** la struttura intervallare di una accordo: si dirà allora che tale struttura è *invariante* rispetto alla trasposizione[4].

[2] La presente trattazione, sebbene basata in modo consistente su concetti algebrici e matematici in generale, è del tutto intuitiva. Tuttavia tutti i concetti introdotti sono esprimibili in modo formale attraverso un opportuno linguaggio.

[3] Questa formula fa parte di quel ramo della matematica che va sotto il nome di *calcolo combinatorio*. In essa, con il simbolo $n!$ si intende n *fattoriale*, ovvero quel numero ottenuto moltiplicando n per (n - 1), poi per (n - 2) e così via fino a che si arriva ad 1. Ad esempio $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

[4] Si noti che sino a questo punto gli accordi sono stato considerati come *insiemi non ordinati* di note. In effetti l'insieme degli intervalli che separano le note di un accordo *non* varia se si cambia l'ordine delle note. Sempre attraverso il calcolo

3. Il vettore intervallare

L'interesse della presente indagine, a questo punto, si sposta *dalle note agli intervalli*. E' opportuno introdurre un nuovo concetto che si rivelerà essere di straordinaria importanza:

Definizione 1. *Si dice* ***vettore intervallare*** *o IV (dall'inglese* interval vector*) l'insieme ordinato di tutti gli intervalli presenti tra le note di un accordo*[5]*.*

Tale vettore si scrive come una sequenza di 6 cifre (dette *entrate*) ognuna delle quali indica il numero di *ricorrenze* di ogni intervallo possibile considerando gli intervalli superiori alla quarta eccedente come rivolti. Sebbene la definizione sia piuttosto complessa, calcolare praticamente i vettori intervallari è abbastanza semplice. Ad esempio, il vettore intervallare dell'accordo composto dalle note {DO#, MIb, FA, FA#} è il seguente: 121110. Infatti in tale accordo vi sono, complessivamente: un semitono, 2 toni, 1 terza minore, 1 terza maggiore, 1 quarta e nessuna quarta eccedente. Tali sequenze godono di stupefacenti proprietà: ad esempio per sapere quante note in comune vi sono tra un accordo e la sua trasposizione ad un certo grado è sufficiente guardare il valore corrispondente a tale grado nel vettore. Nell'esempio precedente, trasportando l'accordo un tono sopra (seconda entrata del vettore) si otterrà un accordo con due note in comune; trasportandolo una terza minore sopra (terza entrata) si otterrà un accordo con 1 sola nota in comune, e così via. Da questo scende immediatamente che se un vettore ha in un'entrata un valore pari al numero delle note che lo compongono allora esso è a *trasposizione limitata* (avrà infatti tutte le note in comune ad un certo livello di trasposizione). Un'altra interessante proprietà è la seguente: se alcune entrate del vettore intervallare di un insieme di sei note sono uguali a 0, vuol dire che l'insieme è *reversibile* (cioè complementare di se stesso ad un certo livello di trasposizione)[6]. Come si è visto precedentemente, l'operazione di trasposizione *non modifica* il vettore intervallare di un accordo. Il vettore si configura allora come una sorta di *codice genetico* di un accordo: è ragionevole supporre che **se due accordi hanno lo stesso IV allora sono lo stesso accordo**.

combinatorio è possibile calcolare *quanti* intervalli si formano in totale in un insieme di note: se n è il numero delle note, allora gli intervalli saranno $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

[5]Per una definizione formale si veda [**?**].

[6]Per altre interessanti proprietà dei vettori si veda ad esempio [**?**].

4. Riduzione degli esacordi

Si consideri di nuovo l'insieme degli accordi di 6 note; si è visto che tale insieme è composto da 924 elementi. Tuttavia molti di questi esacordi hanno lo stesso vettore intervallare: per la precedente congetture esisterà sicuramente una operazione che crea delle *classi* a cui appartengono diversi esacordi con lo stesso vettore. In effetti, *riducendo per trasposizione* si scopre che gli esacordi diventano **80**. La catalogazione in 80 esacordi è tipica in letteratura: già presente in [**?**], è stata sviluppata in modo sistematico, tra gli altri, da [**?**]. Il passaggio da 924 a 80 è sicuramente conveniente: permette di identificare alcune proprietà combinatorie importanti che sarebbe stato quantomento difficile individuare in quasi mille accordi. In particolare, è possibile affermare che:

Definizione 2. *Un esacordo E gode della proprietà:*

- τ *(o* totale*) se esso coincide con il suo complementare e con il suo inverso;*
- α *se coincide con il suo complementare ma non con il suo inverso;*
- β *se coincide con il suo inverso ma non con il suo complementare;*
- γ *se il suo inverso e il suo complementare coincidono, ma sono diversi dall'esacordo;*
- ν *(o* nulla*) se non coincide ne' con il suo complementare ne' con il suo inverso e questi ultimi sono tra loro diversi*[7]*.*

5. Accordi equivalenti per inversione

Nonostante questa nuova catalogazione sia molto utile, esaminando i vettori intervallari degli 80 esacordi si può vedere che esistono ancora esacordi che hanno lo stesso IV. Per le ragioni esposte sopra, deve esistere allora un'altra operazione che permetta di avere delle classi con IV diversi. In effetti tale operazione esiste: è *l'inversione* (anche questa operazione si può definire formalmente). Attraverso l'inversione è possibile ridurre ancora l'insieme degli esacordi: due insiemi si dicono *equivalenti* per inversione se invertendo l'uno si ottiene l'altro e viceversa. Il caso degli accordi maggiori e minori è emblematico: invertendo l'uno si ottiene l'altro; dunque do maggiore è equivalente a do minore per inversione. Dopo aver applicato l'inversione l'insieme degli 80

[7]Come già affermato in precedenza, questa trattazione è puramente intuitiva. I concetti di *complementarità* e di *inversione* tuttavia, sono definibili formalmente; si veda [**?**] per maggiori dettagli.

esacordi si riduce a **35** classi; la tabella **??** mostra la nuova catalogazione (le classi sono chiamate E_i). Dopo questa ulteriore riduzione, *non esistono* esacordi con IV in comune; in altre parole, ridurre per trasposizione e inversione significa ridurre per *vettore intervallare comune*: le 35 classi ora ottenute hanno 35 vettori intervallari diversi. La cosa interessante di questa nuova riduzione sta nel fatto che le 5 proprietà elencate a proposito della catalogazione in 80 esacordi si *propagano* alla catalogazione in 35. In breve, se una classe della catalogazione in 80 gode della proprietà β allora nella catalogazione in 35 tale classe finirà in una nuova classe che gode ancora della proprietà β.

6. Accordi equivalenti per trasformazione

Sebbene a questo punto non vi siano classi con il medesimo vettore intervallare, è ancora possibile ridurre l'insieme degli esacordi introducendo l'equivalenza per *trasformazione moltiplicativa*. Ogni intervallo può generare, se ripetuto varie volte (ovvero *moltiplicato)*, una sequenza di suoni diversi. Gli intervalli 1, 5, 7 e 11 (ovvero semitono, quarta, quinta, settima maggiore) generano sequenze di 12 note, mentre tutti gli altri intervalli generano sequenze di un numero minore di note. Proprio questa proprietà è all'origine di particolari operazioni introdotte negli anni '50 (si veda [**?**]) che correlano la scala cromatica al circolo delle quinte/quarte denominate appunto *trasformazioni*. La trasformazione per intervallo 1 (M1) è *neutra* ovvero non produce modifiche all'accordo originale; la trasformazione per intervallo 11 (M11) corrisponde invece all'inversione. Le altre due trasformazioni, **M5** ed **M7**, sono una l'inverso dell'altra e possono essere usate per ridurre ulteriormente l'insieme degli esacordi [8]. Applicandole sull'insieme di 35 esacordi si giunge infatti ad un insieme più *stretto* composto da **26** classi; la tabella **??** mostra la nuova catalogazione (le classi sono chiamate F_i).

Osservando i vettori intervallari si può notare che in alcuni di essi, dopo l'applicazione delle trasformazioni, vengono *scambiate le entrate 1 e 5*: ad esempio l'esacordo 69 con IV = (1,4,3,2,4,1) trasformato per M5 genera l'esacordo 2 con IV = (4,4,3,2,1,1). La riduzione effettuata dunque, assume come equivalenti tutti i vettori intervallari che presentano la prima e la quinta cifra scambiate. Incredibilmente, *anche questa riduzione preserva le proprietà combinatorie degli esacordi*: l'esacordo

[8] La trasformazione moltiplicativa M5 consiste nella trasposizione ad un tritono di distanza delle note che, in notazione numerica, hanno numero dispari; ciò trasforma, ad esempio, una scala cromatica nel circolo delle quinte. Per una definizione più corretta si veda [**?**].

Classe 35	**80-esacordi**	**Vettore**	**Proprietà**
E_1	1	(5,4,3,2,1,0)	τ
E_2	2, 6	(4,4,3,2,1,1)	γ
E_3	3, 5, 7, 21	(4,3,3,2,2,1)	ν
E_4	4, 22	(4,3,2,3,2,1)	β
E_5	8, 20	(3,4,2,2,3,1)	γ
E_6	9, 18, 23, 54	(3,3,3,2,3,1)	ν
E_7	10, 15, 26, 36	(3,3,3,3,2,1)	ν
E_8	11	(3,4,3,2,3,0)	τ
E_9	12, 19	(4,2,2,2,3,2)	γ
E_{10}	13, 17, 27, 53	(3,3,2,2,3,2)	ν
E_{11}	14, 55	(3,2,4,2,2,2)	β
E_{12}	16, 37	(4,2,1,2,4,2)	β
E_{13}	24, 52	(3,2,3,4,2,1)	ν
E_{14}	25, 46	(3,2,3,4,3,0)	α
E_{15}	28, 51	(2,4,1,4,2,2)	γ
E_{16}	29, 45, 56, 63	(2,3,3,3,3,1)	ν
E_{17}	30, 35	(2,4,2,4,1,2)	γ
E_{18}	31, 38, 49, 50	(3,2,2,3,3,2)	ν
E_{19}	32, 43, 64, 66	(2,3,3,2,4,1)	ν
E_{20}	33, 58	(2,3,4,2,2,2)	β
E_{21}	34, 40	(3,2,2,4,3,1)	γ
E_{22}	39, 44, 59, 62	(3,1,3,4,3,1)	ν
E_{23}	41, 48	(3,2,2,2,4,2)	γ
E_{24}	42, 67	(2,3,2,3,4,1)	β
E_{25}	47	(4,2,0,2,4,3)	τ
E_{26}	57, 61	(2,2,5,2,2,2)	γ
E_{27}	60, 65	(2,2,4,3,2,2)	β
E_{28}	68, 79	(1,4,2,4,2,2)	γ
E_{29}	69, 75	(1,4,3,2,4,1)	γ
E_{30}	70, 77	(2,2,3,4,3,1)	γ
E_{31}	71	(1,4,3,2,5,0)	τ
E_{32}	72, 78	(2,2,4,2,2,3)	γ
E_{33}	73, 74	(2,2,4,2,3,2)	β
E_{34}	76	(3,0,3,6,3,0)	τ
E_{35}	80	(0,6,0,6,0,3)	τ

Tabella 1. Catalogazione in 35 classi

Classe 26	**Classe 35**	**80-esacordi**	**Vettore**	**Proprietà**
F_1	E_1, E_{31}	1, 71	(5,4,3,2,1,0)	τ
F_2	E_2, E_{29}	2, 6, 69, 75	(4,4,3,2,1,1)	γ
F_3	E_3, E_{19}	3, 5, 7, 21, 32, 43, 64, 66	(4,3,3,2,2,1)	ν
F_4	E_4, E_{24}	4, 22, 42, 67	(4,3,2,3,2,1)	β
F_5	E_5	8, 20	(3,4,2,2,3,1)	γ
F_6	E_6	9, 18, 23, 54	(3,3,3,2,3,1)	ν
F_7	E_7, E_{16}	10, 15, 26, 29, 36, 45, 56, 63	(3,3,3,3,2,1)	ν
F_8	E_8	11	(3,4,3,2,3,0)	τ
F_9	E_9, E_{23}	12, 19, 41, 48	(4,2,2,2,3,2)	γ
F_{10}	E_{10}	13, 17, 27, 53	(3,3,2,2,3,2)	ν
F_{11}	E_{11}, E_{33}	14, 55, 73, 74	(3,2,4,2,2,2)	β
F_{12}	E_{12}	16, 37	(4,2,1,2,4,2)	β
F_{13}	E_{13}, E_{30}	24, 52, 70, 77	(3,2,3,4,2,1)	ν
F_{14}	E_{14}	25, 46	(3,2,3,4,3,0)	α
F_{15}	E_{15}	28, 51	(2,4,1,4,2,2)	γ
F_{16}	E_{17}, E_{28}	30, 35, 68, 79	(2,4,2,4,1,2)	γ
F_{17}	E_{18}	31, 38, 49, 50	(3,2,2,3,3,2)	ν
F_{18}	E_{20}	33, 58	(2,3,4,2,2,2)	β
F_{19}	E_{21}	34, 40	(3,2,2,4,3,1)	γ
F_{20}	E_{22}	39, 44, 59, 62	(3,1,3,4,3,1)	ν
F_{21}	E_{25}	47	(4,2,0,2,4,3)	τ
F_{22}	E_{26}	57, 61	(2,2,5,2,2,2)	γ
F_{23}	E_{27}	60, 65	(2,2,4,3,2,2)	β
F_{24}	E_{32}	72, 78	(2,2,4,2,2,3)	γ
F_{25}	E_{34}	76	(3,0,3,6,3,0)	τ
F_{26}	E_{35}	80	(0,6,0,6,0,3)	τ

Tabella 2. Catalogazione in 26 classi

35 della catalogazione in 80 classi, ad esempio, gode della proprietà γ. Dopo la riduzione a 35 classi, tale esacordo cade nella classe E_{17} che gode ancora della proprietà γ. Dopo la riduzione a 26 classi, esso finisce nella classe F_{16} che gode ancora della stessa proprietà. Tutto ciò prova, indirettamente, che le operazioni usate durante la riduzione producono delle trasformazioni *corrette* sull'insieme di note.

7. Teorema di relazione vettoriale

Alla luce di quanto esposto finora, appare chiaro che il contenuto intervallare di un insieme di note *rimane invariato non solo per trasposizione ma anche per inversione*. Esistono inoltre coppie di insiemi con medesimo contenuto intervallare che non sono forme trasposte o inverse: esse sono infatti legate dall'operazione di *trasformazione moltiplicativa*. E' opportuno, a questo punto, introdurre un nuovo concetto:

Definizione 3. *Due insiemi di note P e Q sono detti* ***correlati per contenuto intervallare (Z-correlati)*** *se hanno uguale vettore intervallare a meno dello scambio tra le prima e la quinta entrata.*

Ciò permette di enunciare il seguente teorema fondamentale, la cui dimostrazione è rimandata ad altra sede:

Teorema 1. *Due insiemi di note P e Q sono Z-correlati se e solo se fra loro sussiste una delle seguenti relazioni:*

(1) *P è una forma trasposta o inversa di Q;*
(2) *P è complementare (trasposto e/o inverso) di Q;*
(3) *P è una trasformazione per M5 di Q.*

8. Ortogonalità esacordale

In conclusione, è opportuno riassumere i risultati ottenuti per meglio comprenderne la portata. Delimitare il materiale che si ha a disposizione è un atto fondamentale per poter operare su di esso con piena coscienza. Tale delimitazione si ottiene in primo luogo *contando* e successivamente *riducendo*: si è visto come la riduzione si realizza attraverso l'introduzione di *equivalenze mediante operazioni*. La operazioni esaminate sono state la *trasposizione*, l'*inversione* e la *trasformazione moltiplicativa*. Si è mostrato come tutte queste operazioni non agiscono sul contenuto intervallare di un insieme (chiamato *vettore intervallare*) che si *preserva* dopo la loro applicazione e si configura così come una sorta di *codice genetico*. Alla luce delle considerazioni fatte si è poi passati a riorganizzare gli insiemi di 6 suoni (*esacordi*): da un totale di 924 esacordi si è passati ad una catalogazione in 80 mediante la trasposizione. Tale riduzione ha permesso di identificare delle proprietà combinatorie fondamentali degli esacordi dette $\tau, \alpha, \beta, \gamma, \nu$. Mediante l'inversione poi si è ulteriormente ridotto l'insieme degli esacordi a 35 classi, tutte con diversi vettori intervallari, che preservano però le proprietà degli esacordi. Mediante la trasformazione M5 infine, si è ridotto ulteriormente l'insieme degli esacordi a 26 classi, ancora congruenti con le proprietà esacordali. Ciò ha portato all'enunciazione del *Teorema di relazione vettoriale*: tale teorema svolge una funzione chiave nella comprensione profonda degli esacordi: di fatto esso mostra che tutte le *rappresentazioni* degli esacordi esaminate (942 classi, 80 classi, 35 classi, 26 classi) sono tra loro **ortogonali**, ovvero è possibile passare da una rappresentazione all'altra secondo le proprie necessità. La rappresentazione in 924 classi è quella con maggior *varietà* ma con minor *aggregazione/astrazione*; viceversa, la rappresentazione in 26 classi è quella che maggiormente organizza il materiale perdendo però in specificità. La scelta di una rappresentazione dipende strettamente dall'utilizzo; tuttavia, mentre quelle con 924, 80 e 35 classi preservano certe proprietà di *similarità musicale*, quella in 26 classi accorpa insiemi tra loro anche molto diversi. E' proprio nel compromesso tra massima particolarità e massima generalità che si realizza la composizione musicale.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Verdi, *Organizzazione delle altezze nello spazio temperato*, Diastema Analisi, Treviso 1998.
[2] D. Lewin, *Generalized musical inervals and transformation*, New Heaven 1986.
[3] A. Forte, *The structure of atonal music*, New Heaven 1972.
[4] D. Martino, *The source set and its aggregate formations*, in 'Journal of Music Theory', 5/2 (1961), pp. 225-73.