Sulla struttura logica della musica

Carmine Emanuele Cella
cecily@libero.it

1. Introduzione

1.1 Il processo di creazione della conoscenza musicale.

Per sua natura, il processo di creazione della conoscenza musicale è di difficile formalizzazione. Da un lato esso è di tipo irrazionale, costruito in altre parole sulla base di "intuizioni" difficilmente catalogabili. Tali intuizioni creano dei vuoti nella conoscenza musicale e mostrano la *non linearità* del processo stesso di **creazione musicale**. Per *vuoti nella conoscenza musicale* s'intende la mancanza di una procedura, o di un algoritmo riproducibile, che conduce da un punto all'altro del continuum conoscitivo, senza però che tale mancanza ne violi l'integrità: alcune conoscenze si acquisiscono, ma non si sa come. Dall'altro lato però, a detta soprattutto di coloro che *scrivono* la musica, una grossa parte del processo di creazione musicale è in qualche modo "ingegnerizzata" sulla base di regole (a volte anche molto personali e di natura spesso operativa più che teorica) e risulta così in qualche modo formalizzabile. Da ciò pare emergere una sorta di natura **duplice** della conoscenza musicale.

L'obiettivo principale del presente lavoro è la ricerca di una possibile *struttura logica* della musica. Per struttura logica s'intende una struttura di tipo **assiomatico, grammaticale, algoritmico o d'altra natura**, in grado di rappresentare adeguatamente la conoscenza musicale. Tentativi in tal senso sono stati già condotti ma, tranne che in rari casi, non da compositori.

Per questa ragione il sostrato logico di riferimento è stato inteso in realtà come una sovrastruttura da applicare al prodotto musicale a-posteriori. La struttura logica della musica dunque è stata in generale usata come metodo di 'analisi' di un composto e non come 'descrizione delle procedure'. La composizione, la creazione cioè della conoscenza musicale, si configura come la principale disciplina in cui la natura *duplice* della musica si estrinseca.

Per tale ragione, il secondo obiettivo di questo lavoro è verificare se e quanto, nell'opera dei compositori, una struttura di tipo logico-formale è adoperata in fase di *creazione* del prodotto artistico.
In altri termini, si cercherà in primo luogo di rispondere alla domanda *"Esiste una logica della musica?"*. Nel caso di risposta affermativa si proverà ad affrontare la domanda *"La logica musicale è analitica o procedurale?"*.

Ovviamente, grandi differenze procedurali sono proprie di diversi periodi della storia musicale anche a causa di ragioni culturali, sociali e di conoscenza della materia, ragioni che non saranno esaminate in questa sede. Saranno invece discussi alcuni approcci finora tentati nella determinazione della struttura logica della musica (approcci di natura molto eterogenea tra loro) e si cercherà di capire quale di questi potrà rivelarsi più proficuo per la rappresentazione del processo di creazione musicale.

1.2 Strutturazione del lavoro.

Il lavoro si articolerà in tre parti principali:

- Una prima sezione, in cui si forniranno alcuni concetti base di teoria della composizione ed in cui si definirà il contesto di riferimento delle logiche musicali. Gli elementi forniti in questa prima parte risulteranno essenziali per la comprensione delle teorie formali esposte in seguito. Inoltre, si presenterà una breve panoramica storica sulla teoria della composizione e sui suoi possibili intrecci con le teorie formali della musica.
- Una seconda sezione, in cui si presenteranno i veri e propri approcci alla costruzione di una struttura logica della musica esistenti in letteratura, esaminandone il formalismo e la tipologia, senza entrare nella valutazione del significato di tali approcci.
- Una terza sezione, in cui si esamineranno le problematiche inerenti all'applicazione degli schemi logici presentati al lavoro reale di alcuni compositori ed in cui, mediante l'esame di alcuni casi concreti, si valuterà il significato di tali schemi, da un punto di vista della creazione musicale.

2. Per una teoria della composizione

La composizione, ovvero l'attività di creazione musicale, si basa su un sostrato teorico che ne regola le modalità. Tale sostrato varia molto a seconda della storia e della geografia della musica e non è di natura formale, si configura piuttosto come un *corpus normativo* che definisce gli elementi costitutivi della musica, la loro morfologia, i loro modi di articolarsi e combinarsi in una sintassi ed in un linguaggio, il complesso dei precetti che serve di guida alla loro applicazione. Una sorta di guida stilistica sufficientemente flessibile per poter conciliare gli aspetti tecnici ed artistici della composizione.
Esiste un panorama estremamente eterogeneo di teorie della composizione: fondamentalmente ogni compositore possiede una propria teoria in parte confrontabile con quelle di altri compositori. Nei momenti in cui la storia della musica è stata caratterizzata dalla presenza di teorie estetico-stilistiche dominanti (vedi § 2.2), le teorie proprie dei compositori risultano più compatte e compatibili tra loro. La ricerca di un sostrato logico per la musica è un primo passo verso la costruzione di un terreno comune in cui poter confrontare tali teorie. Risulta inoltre interessante capire quale livello di "meta-teoria" è proprio ad ogni differente teoria: tendenzialmente col progredire della storia della musica vi è un aumento di consapevolezza teorica ed un conseguente maggior interesse verso il livello meta-musicale della composizione. Nei paragrafi successivi si cercherà di mostrare la portata di questo concetto. Nonostante la grande diversità che caratterizza le varie teorie della composizione, tutte quante sono fondate su pochi *elementi basilari derivanti dalla fisica del suono*[1] e dalla teoria delle onde. Tali elementi sono interpretati in maniera differente a seconda della teoria compositiva e il loro significato estetico può variare grandemente.

---

1) In seguito ci si riferirà sempre a teorie di tipo ondulatorio. In realtà intorno al 1950 è nata una visione 'corpuscolare' del suono, ma tale visione ha influenzato solamente teorie della composizione proprie della musica elettronica e non della musica acustica. Per ulteriori chiarimenti si rimanda all'Appendice A.

2.1 Le pietre miliari.

2.1.1 I costituenti del suono: gli ipertoni.

Perfino la più semplice attività musicale, non influenzata dall'educazione o dall'esperienza, si basa sull'*identificazione del rapporto reciproco tra frequenze adiacenti*[2]. Tale rapporto, inteso come distanza tra due frequenze, è detto **intervallo**.
La creazione musicale, in senso lato, può dunque definirsi come la disposizione nel tempo di una successione di intervalli. Ovviamente molti altri parametri sono messi in gioco nella composizione, ma in ogni caso il processo di creazione musicale risulta essere sempre di tipo **mensurale**, ovvero un processo di quantizzazione e classificazione *relativa* dei parametri. Oltre che nel piano frequenziale ciò accade anche, per esempio, nel dominio dell'ampiezza in cui i rapporti reciproci prendono il nome di **dinamiche**[3]**.**
Tra tutti gli intervalli frequenziali possibili, ne esiste uno che gode di speciali proprietà: quello di **ottava**. Tale espressione indica un rapporto di 2:1 tra due frequenze: ovvero una frequenza doppia rispetto all'altra.
La ragione di tale posizione di privilegio verrà presto chiarita; per il momento basti sapere che pressoché tutti i sistemi di organizzazione del materiale musicale, nelle diverse culture e periodi storici, sono racchiusi dentro l'ottava. Ovvero tutti gli intervalli usati nella musica sono più piccoli o uguali a quello di ottava[4].
L'ottava costituisce dunque una vera e propria *classe di equivalenza* per le frequenze: anche un orecchio inesperto riconoscerà che un suono in ottava

---

2) Per poter comprendere la morfologia di base del discorso musicale è necessario comprendere il rapporto relativo tra frequenze: è necessario capire se una frequenza è più acuta o più grave rispetto ad un'altra. In realtà un musicista dotato riesce a capire il rapporto assoluto tra esse: è in grado di affermare l'esatto valore della frequenza che sta ascoltando. Si parla, in tal caso di 'orecchio assoluto' o 'perfect pitch'.
3) Si può ben comprendere quanto nella musica sia importante una organizzazione 'relativa' dei parametri: nel caso delle dinamiche, per esempio, indicazioni del tipo 'piano', 'forte', 'fortissimo' stanno a rappresentare proporzioni dell'intensità sonora e non valori assoluti in Decibel.
4) In realtà in ogni sistema musicale vengono adoperati anche intervalli più grandi dell'ottava, ma essi sono sempre rappresentabili in forma 'normale' in modo da essere contenuti nell'ottava.

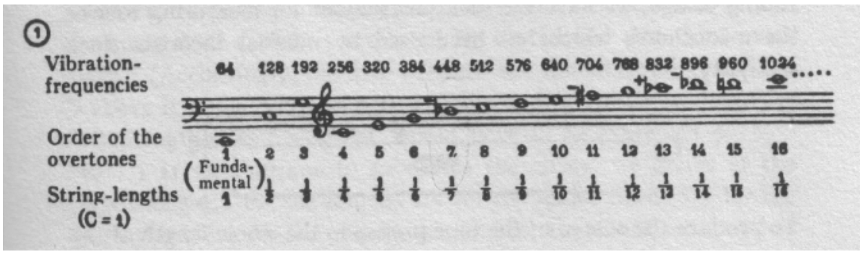
rispetto ad un altro è in realtà una immagine traslata della stessa frequenza. Come si è accennato, la ragione è di tipo fisico e prende il nome di **legge armonica**. La successiva spiegazione è di natura puramente intuitiva. Il **suono**, in senso generale, *consiste in successivi cambiamenti nella pressione di un mezzo da parte di una sorgente*. Tali cambiamenti vengono poi percepiti da un ascoltatore, il quale li decodifica interiormente interpretandoli in maniera più o meno complessa. Se la pressione varia secondo un disegno ripetitivo si dirà che il suono prodotto possiede una forma d'onda **periodica**; se invece non è riscontrabile alcun disegno tale suono è detto **rumore**. Tra questi due estremi esistono anche suoni di tipo quasi-periodico e di tipo quasi-rumoroso.

Come la luce è composta di diversi colori così il suono, secondo la teoria ondulatoria[5], è composto di diverse onde fondamentali di tipo sinusoidale dette **parziali**. Definiremo così **frequenza** il numero di oscillazioni di tali onde nell'unità di tempo e **ampiezza** la loro grandezza. In ogni singolo suono, le parziali stanno in precisi rapporti le une con le altre ed hanno precisi pesi nell'ampiezza complessiva del suono; sono proprio le ampiezze relative a determinare il **timbro** del suono in questione. La frequenza complessiva (o **tono)** del suono invece è determinata, in linea di massima, dal rapporto tra le frequenze delle varie parziali. Perchè un suono abbia una frequenza determinata e si distingua dal rumore, perché cioè esso sia **armonico**, le sue parziali (dette in tal caso armoniche, appunto) devono stare in rapporto *aritmetico* tra loro ovvero devono seguire i numeri naturali: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$; questa legge è detta **legge armonica** e la serie di parziali da essa determinata è appunto detta **serie armonica**.

E' possibile visualizzare detta serie su pentagramma; tale visualizzazione risulta fondamentale per la comprensione del concetto di intervallo e per meglio comprendere l'importanza dell'intervallo di ottava. La fig. F.2.1 mostra la serie armonica a partire dalla nota DO con frequenza 64 Hz (comunemente chiamato DO2):

---

5) Con tale espressione si vuole indicare la teoria descritta per la prima volta dal matematico Jean Baptiste Fourier.



[zig F.2.1]

Si notino alcune proprietà: in primo luogo tra la prima nota a 64 Hz (detta **fondamentale** della serie) e la prima armonica (a 128 Hz) esiste proprio un rapporto 2:1 ovvero la prima armonica è in ottava con la fondamentale.
Quindi il primo intervallo (e dunque quello acusticamente più percepibile) è proprio l'ottava. La sua dominanza prima spiegata a livello intuitivo trova ora una ragion d'essere più precisa. La prima armonica, ovvero la seconda nota, è ancora un DO. Nel sistema di rappresentazione occidentale chiamato pentagramma, si usa lo stesso simbolo per denotare due frequenze diverse. Da ciò emerge il carattere di classe di equivalenza dell'ottava. Il secondo intervallo che troviamo nella serie, ovvero quello tra la seconda e la terza nota (a 192 Hz), è detto intervallo di **quinta**. Tale intervallo si configura dunque come secondo intervallo in ordine di importanza. Il nome della nota è questa volta SOL ed il rapporto tra le due note è 3:2 (ovvero 1:2 / 1:3). Continuando a scorrere la serie si noterà come gli intervalli si stringono in progressione aritmetica verso l'alto. Tale restringimento verso l'acuto rispecchia anche, per inciso, il modo in cui l'orecchio umano percepisce i suoni. Essi vengono infatti percepiti non in modo lineare, ma logaritmico. Si noti infine come il quarto suono della serie (ovvero la terza armonica), ha frequenza quadrupla rispetto alla fondamentale (256 Hz): essa è il doppio del doppio, ovvero la doppia ottava. Anche in questo caso la nota fa parte della stessa classe di equivalenza e si chiama infatti DO. I suoni prodotti dagli strumenti acustici tradizionali (violino, tromba, flauto, ecc.) sono proprio di tipo armonico e sono dunque composti di un certo numero di parziali (in dipendenza dallo strumento) disposte aritmeticamente, le cui ampiezze determinano il timbro dello stesso strumento. Nel caso di un violino ad esempio, il suono viene emesso grazie alla vibrazione delle corde. Supponiamo che venga pizzicata una corda di lunghezza L; il suono emesso avrà allora frequenza f. Se la corda viene bloccata nella sua metà e una delle due metà (con lunghezza L/2) viene poi pizzicata la frequenza risultante sarà 2f. Proseguendo, con una corda di lunghezza L/3 si avrà frequenza 3f; con

lunghezza L/4 si avrà frequenza 4f e così via. Tali frequenze corrispondono appunto alla serie armonica. E' così che gli strumenti ad arco producono il suono. Nel caso di un flauto invece, sarà la lunghezza della colonna d'aria a determinare la frequenza nello stesso modo della corda di violino. E così per le altre tipologie di strumenti.

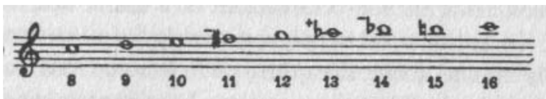
2.1.2 I costituenti del sistema musicale: triade e scala.

La fig. F.2.2 mostra le prime sei parziali della serie armonica. Tali note sono separate dai seguenti intervalli, in ordine di apparizione: ottava, quinta, quarta, terza maggiore, terza minore.

[Fig. F.2.2]

Si tenti ora di immaginare le sei note in un unico *accordo*, ovvero simultaneamente. A meno delle ridondanze le note presenti in tale accordo, sono le note numero 4, 5 e 6. Tali note, sovrapposte in un accordo, formano uno degli elementi più importanti di qualsiasi sistema musicale: la **triade maggiore**. Tale speciale accordo riveste in qualche modo la funzione che l'ottava aveva per gli intervalli. E' l'accordo dominante e corrisponde ad una sorta di *forza di gravità* per il tono di appartenenza, in questo caso DO. Tutti gli accordi possibili sono in qualche modo riconducibili per trasformazione a tale triade. Essa porta in sé, per essere la prima triade della serie armonica, una sorta di stabilità o attrazione. Nonostante questo però non è possibile pensare ad una musica costituita di sole triadi maggiori. Infatti, sia nel caso di una musica con sole triadi maggiori, che nel caso di una musica senza alcuna triade, avremmo la mancanza del senso del movimento, in quanto non è possibile definire alcuna orbita di attrazione gravitazionale tra i suoni. Da quanto detto finora, emerge che le prime sei armoniche dunque rivestono un ruolo di particolare importanza nella costruzione dei sistemi musicali. Proseguendo oltre nella serie armonica troviamo altre parziali interessanti, ma in linea di massima quanto più si sale di ordine tanto maggiori sono i problemi associati alla parziale.

In effetti, nessun sistema musicale noto va oltre la 16° parziale[6]. Noteremo poi come in realtà anche porzioni più piccole delle serie sono sufficienti a costruire sistemi musicali. La serie armonica tuttavia, nel suo stato fondamentale, risulta poco usabile per scopi musicali. Ciò principalmente a causa della costante tendenza al restringimento verso l'alto.
Si è detto precedentemente (cfr. § 2.1.1) che la composizione musicale, può definirsi anche come la stesura nel tempo di una successione di intervalli. Da un punto di vista musicale però non tutti gli intervalli possono essere usati indifferentemente. Essi devono infatti essere sufficientemente piccoli in modo tale che la progressione da un tono a quello adiacente avvenga in modo pressoché contiguo, senza salti. Solo così è possibile costruire in modo intellegibile ciò che viene detto **melodia**.
La serie armonica, evidentemente, presenta intervalli troppo grandi. Solo più avanti, a partire precisamente dalla parziale n.8 e fino ad arrivare alla parziale n. 16 troviamo una certa vicinanza tra gli intervalli (vedi fig. F.2.3):



[Fig. F.2. 3]

Ciò che si nota nella figura è il 'riempimento' dell'ottava creata dalle parziali 8 e 16 (sono entrambi due DO) mediante altre note, più o meno attigue. Tale riempimento viene definito **scala**.
Con scala dunque intendiamo una successione più o meno lineare di intervalli racchiusa in un'ottava. Per la proprietà di equivalenza d'ottava infatti tutte le note fuori da tale intervallo hanno una corrispondenza all'interno di esso: supponiamo di avere una nota di nome RE al di sopra della parziale 16 in figura F.2.1; tale nota crea con la parziale 8 un intervallo di 9°. Dividendo per due la frequenza del RE in questione otterremo la nota alla posizione 9 della figura F.2.1, ovvero sempre un RE, ma questa volta racchiuso tra le parziali 8 e 16. E così via con tutte le altre note.
Generalizzando dunque possiamo affermare che i **sistemi musicali**, indipendentemente da periodo storico, contesto culturale o posizione geografica, *sono forme di ordinamento dei suoni (come definiti in § 2.1.1)*

6) Si vedrà in seguito a quali tipi di problemi ci si riferisce.

fondati su triadi e scale. Tali elementi costitutivi si configurano come degli ***invarianti*** *e costituiscono il contesto di riferimento di ciò che è stato chiamato struttura logica della musica. Detta struttura riguarda in modo pertinente solo il terzo dei passaggi descritti in § 2.1, quello chiamato 'musica': è in questo passaggio che prendono corpo le teorie compositive delle quali si vuole trovare il sostrato.*
Quando in effetti i compositori tentano di strutturare il proprio pensiero creativo, dando così una sorta di risposta al dubbio epistemologico sollevato in § 1.1, lo fanno all'interno di un sistema musicale determinato che può variare, come si è detto, a seconda di fattori storici, geografici, culturali, sociali e non verrà indagato oltre in questo lavoro.

2.1.3 Il sistema temperato.

Come risulta chiaro dai fatti appena esaminati, nella pratica musicale il concetto di *scala* è di primaria importanza. Nell'esecuzione su strumenti acustici, gli armonici si possono ottenere suddividendo la corda nelle parti opportune; la scala si può ottenere mettendo in successione gli opportuni armonici. Idealmente tale procedura funziona; praticamente però essa si rivela assai scomoda ed imprecisa: si supponga ad esempio di voler ottenere la nota FA a partire dalla serie di armonici sulla nota DO (ovvero quella in figura F.2.1). All'undicesimo posto si trova un FA# ma nella serie non vi è alcun FA. L'esecutore dovrà allora *stonare* la nota naturale dell'armonico per ottenere quella desiderata. Negli strumenti a fiato ad intonazione naturale (ovvero quelli in cui il canneggio fisso consente di ottenere una sola serie di armonici) tale pratica è esistita in passato col nome di *Karinblasen*. E' facile immaginare che quando un esecutore suona da solo, tale pratica si può usare (anche se non è comoda); nel momento però in cui un esecutore deve suonare *insieme* ad altri esecutori, la tecnica di 'stonatura' dell'armonico non è attuabile: se ad esempio un primo esecutore stonasse in modo diverso da un secondo esecutore, i risultati acustici sarebbero musicalmente catastrofici.

Per questa ragione (ed anche per altri importanti motivi che esulano dagli obiettivi principali di questa trattazione) è nata una forma di intonazione degli intervalli differente da quella naturale[7]. Tale forma *artificiale* è alla base di tutta la musica occidentale scritta, grossomodo, dal periodo Barocco fino al giorno d'oggi e prende il nome di **sistema temperato equabile[8].**

L'intonazione temperata si ottiene *suddividendo in parti* ***uguali*** *l'intervallo di ottava* e giungendo così alla creazioni di un numero N di intervalli uguali tra loro detti appunto temperati. Nel caso del **sistema temperato occidentale**, il valore di N è 12. L'ottava viene divisa in 12 parti uguali dette **semitoni*;*** ogni semitono vale così un dodicesimo dell'intervallo di ottava. Tale intervallo, come visto sopra (cfr. supra § 2.1.2) è identificato dal rapporto 2:1. Per tale ragione il valore relativo di un semitono su una ottava è esprimibile dalla formula $v=\sqrt[12]{2}$ ed è pari a circa 1.05946. Praticamente, volendo calcolare la frequenza della nota che dista un semitono, ad esempio, dal LA detto centrale con frequenza pari a 440Hz si dovrà moltiplicare tale valore per v, ottenendo 466.162 Hz ovvero LA# nel sistema temperato occidentale. Con buona approssimazione, in tal modo è possibile calcolare il valore di tutti i semitoni del sistema. L'insieme dei semitoni, ordinato in frequenza, è detto **scala cromatica** ed è il sopra-insieme di tutte le scale formabili nel sistema temperato. La rilevanza concettuale di tale tipo di intonazione è enorme: mediante la suddivisione in parti uguali il sistema temperato gode di una fondamentale proprietà: l'**autosimmetria**.

Con tale proprietà si intende una sorta di *isotropia* degli intervalli del sistema per cui una struttura intervallare in un punto *p* può essere traslata in un punto *p'* senza che tale traslazione modifichi la struttura stessa.

Nel sistema temperato tale traslazione prende il nome di **trasposizione**. In altri termini, trasportare una sequenza di intervalli 2 semitoni sopra significa replicare tale serie a partire da due semitoni più in alto rispetto al punto originale di partenza. Il prezzo da pagare per avere tale proprietà è però abbastanza alto: le frequenze ottenute mediante la divisione artificiale dell'ottava sono *leggermente* differenti da quelle che si sarebbero ottenute seguendo la legge armonica naturale (sono dunque *stonate*). Tale differenza prende il nome di **comma sintonico** ed è il principale responsabile

7) Per maggiori chiarimenti sui sistemi di intonazione e per una più precisa definizione del sistema temperato, si veda A. Frova, “La fisica nella musica”, Zanichelli, 1999.
8) Concepito da Andreas Werckmeister (1645-1706) verso la fine del Seicento, fu perfezionato da Giorgio Neidhart. Ebbe larga affermazione nel XVIII secolo, grazie a due famosi volumi sul "Clavicembalo ben temperato" scritti da J.S. Bach, comprendenti 24 preludi e fughe scritti in tutte le tonalità evitando quelle omologhe.

dell'affermazione del sistema musicale più importante per la cultura occidentale: la **tonalità.**

Nel successivo paragrafo si vedrà come la tonalità sia stato e sia tuttora il sistema di riferimento per la musica in occidente; si vedrà anche come tale sistema sia nato e come sia *morto*.

2.2 Lettura diacronica del cromatismo.

2.2.1 Monodia, polifonia, tonalità e cromatismo.

La progressione concettuale che ha condotto dalla concezione *armonica* a quella *temperata* è avvenuta gradualmente nel tempo. Con buona approssimazione[9], è possibile affermare che inizialmente la musica era composta di una sola linea melodica detta **monodia**. Col progredire della teoria musicale e con la definizione di scale più idonee alla sovrapposizione di linee melodiche (cfr. § 2.1.3), si è giunti ad una forma di espressione musicale che prevedeva più linee insieme. Tale forma è detta **polifonia** e può essere considerata uno dei progressi concettuali più importanti nella storia della musica d'occidente. E' proprio in tale contesto che si sono sviluppate le prime teorie della composizione: nel momento in cui è nata la necessità di sovrapporre note è nata anche la necessità di una regolamentazione per tale sovrapposizione[10]. Furono sviluppate delle *meccaniche* per la produzione di note basate sulla teoria combinatoria delle matrici (sviluppata mediante opportuni grafismi) dando origine a quella affascinante arte che prende il nome di **contrappunto[11].**

La figura F.2.1 mostra la famosa *Tabula Mirifica* di Kircher, una sorta di macchina per il contrappunto **quadruplo** ovvero una complessa forma combinatoria in grado di combinare quattro flussi melodici tra loro.

---

9) Si veda un manuale di storia della musica per informazioni più dettagliate.
10) Sarebbe molto affascinante studiare questo periodo della storia della musica ed esaminare la relativa produzione di trattati sulla teoria dell'armonia, ma tale argomento esula molto dagli obiettivi di questa trattazione. Basti sapere che l'arte della combinazione delle linee melodiche si sviluppò a tal punto da raggiungere una complessità vertiginosa.
11) Il nome deriva dall'espressione latina *Punctum contra punctum*, usata per indicare la pratica di sovrapporre le note (*puncta*) una sull'altra.

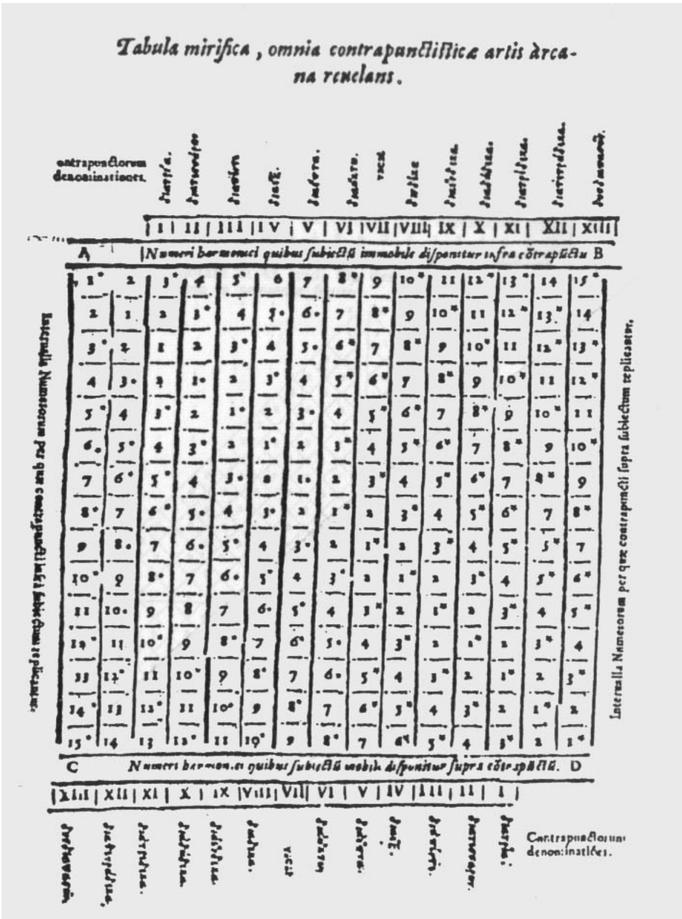


Fig. F.2.1: La Tabula mirifica di Kircher.

Parallelamente allo sviluppo della polifonia e del contrappunto si è chiarita la teoria sui sistemi di intonazione. Con lo stabilirsi del sistema temperato si è fatta strada una teoria compositiva che favoriva la creazione di *rapporti di gerarchia tra le note*, rapporti cioè in cui alcune note hanno maggiore importanza di altre.

Nasceva la **tonalità**, una teoria basata sul domino del *tono* e sulla regola del **circolo delle quinte**[12], destinata a dominare il panorama della musica occidentale per circa 600 anni. Nella tonalità è stata scritta la gran parte della musica cosiddetta *classica*: a partire da compositori come Bach e Haendel fino a compositori come Chopin e Schummann, passando da Mozart e Beethoven. L'uso delle leggi dettate da tale teoria è cambiato da compositore a compositore anche grazie alle differenze culturali e sociali del momento storico in cui i compositori si sono trovati ad operare. In ogni caso, il corpus normativo di riferimento è sempre stato un soggetto con cui confrontarsi: alcuni compositori lo hanno rispettato completamente, altri lo hanno infranto mutandolo e spingendolo ad un continuo sviluppo.

Con il passare del tempo i compositori hanno tentato di scardinare il sistema sempre più, introducendovi delle *irregolarità*. Paradossalmente ad un certo punto, le irregolarità hanno superato in numero gli elementi leggittimi del sistema giungendo cosi, in effetti, ad una sorta di negazione del sistema stesso. Uno dei compositori che ha maggiormente contribuito a tale *distruzione* è Richard Wagner: nella sua opera *Tristano e Isotta* la detronizzazione del sistema basato sulla tonalità è stata pressoché totale. Tale detronizzazione ha creato grande scompiglio e confusione nei contemporanei di Wagner ma ha anche dato inizio ad uno dei periodi più fertili, per quanto riguarda lo sviluppo teorico, di tutta la storia musicale.

Agli inizi del XX secolo, Arnold Schoenberg (compositore austriaco operante a Vienna) ha teorizzato una nuova teoria delegittimando del tutto la tonalità. Tale teoria, chiamata volgarmente **dodecafonia**[13], prevedeva una *parificazione* degli intervalli ed aboliva così la gerarchia creata dalla tonalità. A fondamento della dodecafonia, stava l'uso di *tutti e dodici i semitoni della scala cromatica, utilizzati in sequenza senza ripetizioni*. Ancora una volta dunque, l'utilizzo di una scala (in questo caso quella cromatica) ha condizionato fortemente la teoria della composizione.

La monodia e la polifonia utilizzavano scale di 5 o 6 suoni; la tonalità si basava su scale di 8 suoni; la dodecafonia, infine, adotta l'intero panorama intervallare del sistema temperato utilizzando una scala di 12 note.

---

12) Tale regola organizza la disposizione delle note della scala secondo intervalli di quinti: percorrendo il “circolo” si deducono importanti informazioni sul contesto musicale di riferimento.
13) Schoenberg non ha mai usato tale termine; egli chiamava la sua teoria 'pantonalità' ma in effetti è con dodecafonia che la teoria schoenbergiana ha avuto diffusione.

Il processo di *generalizzazione* compiutosi nelle scale fino agli inizi del secolo scorso è stato parallelo a quello di *specializzazione* della teoria della composizione. Inizialmente infatti tale teoria era centrata su un livello molto generale, mirato alla ricerca di leggi in grado di regolare i rapporti tra le note. Successivamente la teoria della composizione si è spostata sempre più verso la ricerca delle proprie fondamenta giungendo ad interrogarsi sulla propria legittimità.

Le riflessioni *meta-teoriche* sulla composizione hanno portato, come si vedrà, ad un aumento di responsabilità per i compositori e ad una conseguente **maggiore libertà**.

2.2.2 Analisi, percezione, composizione.

Prima di procedere oltre, è necessario fare una distinzione tra *analisi, percezione e composizione.* L'analisi tenta di spiegare la musica, solitamente facendo appello a ciò che *si sente* nella musica. In altri termini, essa è legata alla percezione. Tale disciplina dunque, sebbene utile per la comprensione di testi musicali, ha una applicazione molto limitata per quanto riguarda l'atto di *creare* la musica. E' probabile che quando si ha la comprensione di una analisi musicale, si abbia anche la comprensione del testo musicale analizzato; ciò non significa però che si sia in grado di creare un nuovo testo musicale. A volte è stato detto che l'analisi è una sorta di *de-composizione* del materiale musicale (un retrogrado della composizione). La composizione in effetti non è l'inverso della percezione; i brani non possono essere scritti come se la composizione fosse una sorta di forma *rallentata* della percezione. L'ascolto è una attività unidirezionale dipendente dal tempo. Non è possibile ascoltare un pezzo all'indietro; non è possibile accelerare gli eventi musicali che ci colpiscono. La composizione invece è un' attività *indipendente* dal tempo nel senso che il compositore, contrariamente all'ascoltatore, deve possedere una percezione *istantanea e totale* del pezzo e delle relazioni che in esso intercorrono. Una delle più grosse difficoltà che si incontrano nell'atto del comporre è proprio data dalla mancanza di questa visione totale atemporale: spesso si è tentati di scrivere un pezzo 'da capo a fondo', seguendo una qualche forma di ispirazione.

In realtà anche in passato, sebbene la consapevolezza del comporre fosse diversa, i compositori tendevano ad avere tale tipo di visione[14]. Al giorno d'oggi il compositore è obbligato a fare molte più scelte rispetto ai compositori del passato. Tali scelte, erano in passato implicite nel processo compositivo proprio di ciascun periodo storico. Questo fardello di scelte rende più difficoltoso il compito di comprensione delle relazioni globali dell'opera musicale,ostacola la visione atemporale e olistica di cui si è parlato sopra e implica l'esistenza di vari *livelli* che organizzano la struttura compositiva. Quest'ultimo fatto suggerisce un'approccio alla composizione basato su approssimazioni successive, ognuna dotata di un proprio grado di specificità. Durante i secoli, il concetto di composizione è mutato in maniera sostanziale. In questo senso si vuole distinguere *l'atto* del comporre dalla *catena di scelte* proprie della composizione: perché *una composizione possa esistere c'è una catena di scelte da effettuare, tuttavia, in differenti momenti storici i singoli compositori sono entrati in questa catena di scelte in punti differenti.* La tabella T.2.1 mostra, sulla destra, la serie di scelte da effettuare nella creazione di un prodotto musicale e, sulla sinistra, il punto d'entrata approssimativo nella catena di scelte dei compositori in differenti periodi:

Tabella T.2.1: Le scelte della composizione.

PUNTO D'ENTRATA	CATENA DI SCELTE
I compositori oggi	Materiali musicali (frequenze, rumore, ecc.) Limiti (*Cos'è la musica?*)
Stravinsky, Schoenberg	Sistema musicale (tonale, 12-toni, cromatico, diatonico, ecc.)
Beethoven	Procedura (forma globale dello specifico lavoro: sonata, variazioni, ecc.)
Bach, Mozart	Mezzo (strumenti, voci, ecc.) Organizzazione interna (forma, ecc.) Proprietà medie (struttura della frase, ecc.) Dettagli di superficie

14) Cfr. Wourinen (1979).

Ovviamente la complessità del fenomeno rende questa presentazione inadeguata e provvisoria. In ogni caso, il diagramma presentato suggerisce che oggi i compositori devono assumersi molta più responsabilità che in passato. Dal 17° al 19° secolo, quando la composizione seguiva le leggi dettate dalla tonalità, la maggior parte del fardello di scelte nella composizione era assorbita dalla *tradizione* e dalla *convenzione*. Ciò ovviamente, non sminuisce il valore dell'operato dei grandi compositori del passato ma mostra soltanto come ogni compositore debba sapersi confrontare con il proprio momento storico. Se in passato non era necessario fare scelte sui fondamenti della musica, oggi è indispensabile.

Ecco perché è necessario indagare quale sia la natura di tali fondamenti. Più ci si avvicina all'era attuale più aumenta la consapevolezza sulla composizione. Inizialmente il contesto era dato per assodato mentre successivamente è divenuto esso stesso oggetto di indagine. Il livello *meta-teorico* della composizione ha guadagnato spazio, in rapporto al livello teorico interno. Proprio tale livello oggi, deve trovare un'adeguata sistemazione.

3. Formulazione della sintassi logica

La discussione che segue, esamina alcuni approcci possibili per la definizione di ciò che abbiamo chiamato “struttura logica della musica” o, per brevità, *logica musicale.* Tentativi per rappresentare la conoscenza musicale in forme logiche tradizionali (predicative, non-monotone o modali) hanno spesso generato confusione tra nozioni sintattiche e concetti semantici di interpretazione. Si mostrerà come *le logiche per la musica siano diverse dalle logiche sviluppate per la descrizione dei concetti di verità* e come tali forme logiche possano essere dotate di uno status formale e/o computazionale che eviti tali confusioni.

La logica musicale non è un concetto statico né di dominio di un'unica disciplina intellettuale. Contributi alla nozione ed alle istanze di logiche musicali ed alla emergente disciplina dell' intelligenza artificiale applicata alla musica si trovano nella letteratura relativa alla teoria musicale, alla psicologia, alla musicologia, alla computer music. In molti casi tali contributi hanno fallito nel loro intento, sia perché troppo ristretti ad un particolare sottoinsieme di musiche (per esempio la musica occidentale), sia perché incapaci di distinguere tra teoria e prassi, sintassi e semantica, dipendenza e indipendenza dal contesto. Ognuno degli approcci esaminati è in qualche modo specializzato ed orientato verso un particolare dominio. Nessuno si presenta come completo, ma un esame delle varie tipologie può dare un' idea delle possibilità che la logica musicale fornisce. I principali orientamenti esaminati sono i seguenti.

- **Definizione dei postulati:** proposto da S. K. Langer, è uno dei primi approcci sviluppati. Si basa sulla definizione di alcuni postulati fondamentali da cui discendono i teoremi validi del sistema.
- **Approccio insiemistico:** è una evoluzione ed un perfezionamento dell' approccio della Langer. Utilizza i postulati come assiomi per una teoria assiomatica degli insiemi e tenta la costruzione di un modello interpretativo.
- **Approccio linguistico:** è stato sviluppato a partire da alcune idee di Charles Seeger ed è centrato sulla definizione di grammatiche “context-free” da usare in senso generativo per la costruzione del sistema, previa la strutturazione di un sistema di riferimento semantico.

- **Approccio algebrico:** sfrutta delle strutture basilari di algebra delle matrici per organizzare il sostrato teorico della composizione. aa partire dagli inizi del XX° secolo i compositori hanno usato strutture algebriche simili a quelle descritte.

Come già affermato, nessuno di questi tentativi risulta completo. La stessa panoramica qui presentata raccoglie alcune possibilità (forse le più significative) e non si avoca alcuna pretesa di completezza. Nel capitolo successivo, alla luce dei risultati raggiunti, si tenterà una valutazione degli approcci proposti[15].

3.1 I postulati di Susanne K. Langer.

Nel 1929 la rivista americana "The Monist" pubblicava l' articolo di una studiosa americana di nome Susanne K. Langer, intitolato "A set of postulates for the logical structure of music" ovvero "Un insieme di postulati per la struttura logica della musica". Con tale articolo, la Langer gettava nuova luce sul problema dei fondamenti della musica. Dopo la "rivoluzione" concettuale operata da Schoenberg e dalla sua scuola (cfr. § 2.2), è apparsa evidente la necessità di una riflessione sul livello *metateorico* della musica. In effetti, le innovazioni dei primi del secolo scorso hanno invalidato la teoria forte di riferimento, l'armonia, relativizzandola ad "una delle possibili teorie". Proprio per questa ragioni i compositori si sono visti costretti a porsi delle domande su come costruire una teoria della composizione. Le prime risposte di natura più formale, sono giunte proprio dalla Langer.

3.1.1. Complessità e forma astratta.

Ogni universo del discorso, afferma S. Langer, ha una sua struttura logica. Esiste un certo numero di situazioni possibili che possono verificarsi all'interno di esso. I giocatori di scacchi esperti possiedono una discreta (sebbene non esplicita) conoscenza delle situazioni che si possono creare manipolando i 32 pezzi sui 64 quadrati; i logici medievali hanno espresso le

15) Si noti che il formalismo adottato in ogni singola sezione è quello proprio degli articoli originali su cui la sezione è basata.

possibili contorsioni del sillogismo mediante la loro curiosa “runa”: Barbara, celarent, Darii, ecc.
Una tale collezione di situazioni ipotetiche comprende uno studio empirico del “campo” entro il quale può verificarsi ognuno degli specifici casi. In un universo del discorso molto grande o complesso, tuttavia, un semplice inventario enumerativo non è attuabile. Le possibili configurazioni della scacchiera, per esempio, raggiungono numeri così sbalorditivi che una loro conoscenza enciclopedica, sempre che sia a portata umana, si rivela inutile data la vastità. E gli scacchi, dopotutto, sono un sistema piuttosto semplice.
Altri “sistemi”, quali la scienza, la morale, l'arte e tutti i labirinti della vita pratica, sono così spaventosamente complessi che non si possono neppure vedere come campi logici circoscritti. Non si può sperare di esaurire tutte le loro possibilità mediante la pura deduzione; l'unica speranza è trovare *alcune relazioni formali* tra gli elementi di tali sistemi le quali serviranno come chiave per una parziale comprensione delle possibilità che si presentano. La ricerca di queste relazioni è propria di discipline come la matematica e la fisica (grazie alla sua formulazione matematica).
La logica moderna, molto più complessa di quella descritta da Aristotele, si concentra sulla ricerca di proprietà generali e giunge così alla formulazione di ciò che viene chiamato “algebra booleana”. Tali tipologie di algebra riassumono, in pochi postulati generali, tutte le possibilità all'interno dell'universo delle proposizioni. Inoltre, possiedono l'interessante proprietà di poter essere applicate, con poche modifiche, anche ad altri universi di proposizioni rispetto a quello per cui sono state create. Proprio questa “adattabilità” delle algebre booleane, ha portato l'attenzione sul fatto che ogni sistema *possiede* delle proprietà generali e può, almeno teoricamente, essere ridotto ad un insieme di postulati.
Nella maggior parte dei casi, tale possibilità rimane puramente teorica a causa della grande quantità di materiale analizzata; Leibniz ha fatto opportunamente notare che un matematico può trovare l'equazione per ogni tipo di curva, ma che nessuno può calcolare le equazioni di tutte le curve possibili. Tuttavia, esistono alcuni sistemi di natura sufficientemente semplice, dei quali è possibile descrivere le proprietà formali. Uno di questi è, appunto, la musica.

3.1.2 I quindici postulati fondamentali.

Con le parole dell'autrice:

"Sembra plausibile che esistano relativamente *pochi elementi coinvolti nella musica e che ci siano solo alcune possibilità di combinarli secondo principi definiti*. Un insieme di tali principi, atti a delimitare il campo in cui ogni configurazione musicale deve necessariamente esistere, costituisce la **forma astratta**, la **logica della musica** ed è esso stesso una forma speciale di algebra, non "numerica" né "Booleana" ma di equivalente formalismo matematico, capace di una sola interpretazione".

Il seguente insieme di postulati intende definire tale struttura astratta.

Sia K una classe di elementi a, b, c, ...; siano poi • una operazione binaria, → una operazione binaria; sia C un relazione monadica (o proprietà) e < una relazione diadica. Allora:

1. Se a e b sono due elementi di K, allora $a \bullet b$ è un elemento di K.
2. Per ogni elemento a di K, $a \bullet a = a$.
3. Se a e b sono elementi di K, allora $a \rightarrow b$ è un elemento di K.
4. Per ogni a e b elementi di K, $a \rightarrow b = b \rightarrow a$ implica che $a = b$.
5. Per ogni a, b e c elementi di K, $(a \bullet b) \bullet c = b \bullet (a \bullet c)$.
6. Per ogni a, b e c elementi di K, esiste almeno un elemento d di K tale che $(a \rightarrow b) \bullet (c \rightarrow d) = (a \bullet c) \rightarrow (b \bullet d)$.
7. Esiste almeno un elemento r di K tale che, per ogni elemento a di K, $a \bullet r = a$.
8. Esiste una sottoclasse T di K tale che, per ogni a e b elementi di K diversi da r e per ogni c elemento di K, se $a = b \bullet c$ implica $b = c$, e a $= b \rightarrow c$ implica $b = r$ oppure $c = r$, allora a è elemento di T.
9. Per ogni a elemento di T, vale C $(a \bullet a)$.
10. Per ogni a, b e c elementi di K ~C $(a \bullet b)$ implica ~C $(a \bullet b \bullet c)$.
11. Per ogni a elemento di K, esiste una sottoclasse A di K tale che per ogni b e c elementi di K, b è elemento di A se e solo se C$a \bullet b \equiv$ C$b \bullet c$.
12. Per ogni a e b elementi distinti di T, $\sim(a < b) \equiv (b < a)$.
13. Per ogni a, b e c elementi di T, $a < b$ e $b < c$ implica $a < c$.
14. Per ogni a, elemento di T, per ogni altro elemento b di T, che non è elemento di A, e per ogni a' elemento di A esiste almeno un elemento di B, b', tale che se $a < a'$ allora $\sim(a < b < a')$ implica $(a < b' < a')$.

15. Per ogni a elemento di T esiste almeno un elemento $a°$ di A tale che per ogni b elemento di A, diverso sia da a che da $a°$, $a < b$ e $a < a°$ implica $a° < b$, e $a < a°$ e $b < a°$ implica $b < a$.

Questo insieme di postulati, visto puramente come una struttura senza alcuna possibile interpretazione, assomiglia a tal punto ad un'algebra booleana da rendere le differenza tra le due quasi insignificanti. Le due operazioni • e → richiamano le familiari moltiplicazione e somma booleane. In effetti, l'operazione • ha tutte le caratteristiche della moltiplicazione (o congiunzione); è infatti commutativa e associativa come la booleana × (talvolta proprio espressa con lo stesso simbolo •). Tuttavia l'operazione che si può pensare corrispondente alla somma non ha le proprietà del segno logico + (ad esempio non è commutativa). Questa è la prima importante divergenza dal sistema di Boole. Inoltre, sebbene l'elemento unico r corrisponda per certi aspetti allo zero booleano, non esiste un analogo dell'uno. La relazione < ha proprietà molto simili a quelle dell'inclusione ("implicazione"), anche se è una relazione strettamente seriale, come quella di ampiezza; questa limitazione, tuttavia, come quella derivante dal fatto che < si applica solo ad una sotto-classe della classe iniziale K, possono essere considerate come pure restrizioni su un'algebra derivabile dalle premesse classiche. La presenza della relazione monadica o *proprietà* C fa capire quale sia l'uso fatto dell'elemento uno dai successori di Boole, espresso nella formula piuttosto confusa "$a = (a = 1)$". Una proposizione corretta del calcolo proposizionale rimpiazzerebbe tale abuso dell'uno con qualche funzione-valore tipo Ca, da intendere: "a è vero". Dunque le maggiori differenze tre i due sistemi, sono:

1. la non commutatività di →;
2. la natura incompleta dell'elemento corrispondente allo zero;
3. la mancanza dell'elemento corrispondente all'uno.

Queste divergenze rendono la nuova algebra meno simmetrica del calcolo logico. La dualità di + e × non è preservata ed è inoltre persa la simmetria data dalla comprensione dell'intero sistema booleano all'interno di due termini limite, 0 e 1. Se la perdita in semplicità e eleganza formale sia compensata da un qualche tipo di guadagno nella adeguatezza della struttura algebrica ottenuta, può essere argomento di discussione ma non verrà condotta in questa sede.

3.1.3 L'interpretazione della nuova algebra.

L'interpretazione dell'algebra ottenuta mediante i quindici assiomi sopra presentati, porta alla definizione della **struttura formale della musica**. Non è facile per persone abituate ai concetti usualmente impiegati nella teoria musicale (quali "tono", "intervallo", "progressione", "pausa") trattare con forme astratte del tipo descritto. L'analisi delle relazioni di base di tutte le possibili strutture musicali richiede che siano "dimenticate" concezioni europee, come la scala diatonica, e soprattutto che ci si liberi dalla "tirannia" imposta dal pianoforte con la sua intrinseca divisione del continuum delle frequenze in semitoni. La determinazione di specifici intervalli, maggiori, minori, perfetti, aumentati non riguarda la struttura intrinseca della musica; l'insieme dei postulati che è stato presentato, tuttavia, va inteso come una sorta di prolegomeni ad ogni tipo di musica. Proprio per questa ragione, il sistema presentato non incorpora le leggi proprie della composizione (sebbene queste possano venir rappresentate nel sistema) ne' la fisica del suono che, per ovvie ragioni, afferisce ad altre discipline. Mediante l'**interpretazione**, allora, l'insieme dei postulati esposti si potrà leggere come segue:

1. Se *a* e *b* sono elementi musicali, l'**intervallo** *a*-con-*b* è elemento musicale.
2. Se *a* è un qualche elemento musicale, *a* è uguale all'**unisono** *a*-con-*a*[16].
3. Se *a* e *b* sono elementi musicali, la **progressione** *a*-verso-*b* è elemento musicale.
4. Se *a* e *b* sono elementi musicali e se *a*-verso-*b* = *b*-verso-*a* allora *a* e *b* sono lo stesso elemento musicale.
5. Se *a, b* e *c* sono elementi musicali, allora l'intervallo (*a*-con-*b*)-con-*c* è lo stesso intervallo di *b*-con-(*a*-con-*c*).
6. Se *a, b* e *c* sono elementi musicali, allora esiste almeno un elemento musicale *d* tale che l'intervallo della progressione (*a*-verso-*b*)-con-(*c*-verso-*d*) è uguale alla progressione dell'intervallo (*a*-con-*c*)-verso-(*b*-con-*d*)[17].
7. Esiste almeno un elemento musicale *r* tale che se a è un elemento musicale diverso da *r*, l'intervallo *a*-con-*r* è uguale ad *a*.

---

16) Per nozioni quali intervallo ed unisono si rimanda al capitolo secondo.
17) Secondo l'autrice, questo postulato incorpora il principio del "contrappunto".

8. Esiste una sotto-classe T di elementi musicali, i **toni**, tale che se *a* e *b* sono elementi musicali distinti da *r* e *c* è un qualche elemento musicale, e se (*a*=*b*-con-*c*) implica (*b* = *c*) e (*a*=*b*-verso-*c*) implica *b* = *r* oppure *c* = *r*, allora *a* è un tono (ovvero: se *a* è un intervallo allora esso è un unisono e se *a* è una progressione ogni membro eccetto uno è una **pausa**).
9. Se *a* è un tono, l'unisono *a*-con-*a* è **consonante**.
10. Se *a*, *b* e *c* sono elementi musicali allora se *a*-con-*b*-con-*c* è consonante allora *a*-con-*b* è consonante.
11. Per ogni elemento musicale *a*, diverso da *r*, esiste una sottoclasse di elementi A (le **ricorrenze** di *a*) tale che per ogni *b* e *c*, *b* è ricorrenza di a se e solo se "*a*-con-*c* è consonante" è equivalente a "*b*-con-*c* è consonante".
12. Se *a* e *b* sono due toni distinti, allora se *a* non è **precedente nell'ordine delle frequenze** a *b*, *b* è precedente (*breviter*) ad *a*.
13. Se *a, b,* e *c* sono toni qualsiasi, allora se *a* precede *b* e *b* precede *c* allora *a* precede *c*.

14. Se *a* è un tono, *b* un tono qualsiasi distinto da *a,* e non ricorrenza di *a*, e *a'* è una qualsiasi ricorrenza di *a*, allora esiste almeno un elemento musicale *b'*, ricorrenza di *b*, tale che se *a* è precedente ad *a'* e *b* non è **compreso nell'ordine delle frequenze** tra *a* ed *a',* allora *b'* è compreso (*breviter)* tra *a* ed *a'*.
15. Per ogni tono *a* esiste un tono *a*°, ricorrenza di *a*, tale che se b è una qualsiasi altra ricorrenza di *a*, e se *a* precede *b* ed anche *a*° allora *a*° precede *b*; e se *a* precede ad *a*° e *b* precede *a*° allora *b* precede ad *a* (ovvero: esiste almeno una ricorrenza di *a,* l'**ottava**, tale che nessun' altra ricorrenza possa esistere tra essa ed *a*).

3.1.4 I teoremi fondamentali della musica.

Tutte le relazioni essenziali tra elementi musicali si possono dedurre dall'insieme di postulati presentato; tra le relazioni deducibili vi sono, ad esempio, il carattere ripetitivo dei semitoni all'interno dell'ottava, l'equivalenza dei valori consonanza, di ogni intervallo e di ogni ripetizione degli stessi, la ricorrenza di un intervallo di una data frequenza relativa nelle ottave successive, ecc. Ecco alcuni dei teoremi del sistema più importanti.

Teorema 1.
Per ogni a e b elementi di K: $a \bullet b = b \bullet a$.
Prova:

	$b = b \bullet r$	(assioma 7)
dunque	$a \bullet b = a \bullet (b \bullet r)$	
	$= (b \bullet a) \bullet r$	(assioma 5)
	$= b \bullet a$	(assioma 7)
dunque	$a \bullet b = b \bullet a$	Q.E.D.

Teorema 2.
Per ogni a, b e c elementi di K: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
Prova:

	$(a \bullet b) \bullet b = b\ (a \bullet c)$	(assioma 5)
	$= (a \bullet c) \bullet b$	(teorema 1)
	$= (c \bullet a) \bullet b$	(teorema 1)
	$= a \bullet (c \bullet b)$	(assioma 5)
	$= a \bullet (b \bullet c)$	(teorema 1)
dunque	$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$	Q.E.D.

Teorema 3.
Per ogni a e b elemento di T, ogni a' elemento di A ed ogni b' elemento di B: $Ca \bullet b \equiv Ca' \bullet b'$.
Prova:

	$Ca \bullet b \equiv Ca' \bullet b'$	(assioma 11)
	$a' \bullet b = b \bullet a'$	(teorema 1)
	$Cb \bullet a' \equiv Cb' \bullet a'$	(assioma 11)
	$b' \bullet a' = a' \bullet b'$	(teorema 1)
dunque	$Ca \bullet b \equiv Ca' \bullet b'$	Q.E.D.

Teorema 4.
Per ogni a elemento di T ed ogni a' elemento di A: $Ca \bullet a'$.
Prova:

	$Ca \bullet a$	(assioma 9)
	$Ca \bullet a \equiv Ca' \bullet a$	(assioma 11)
	$a' \bullet a = a \bullet a'$	(teorema 1)
dunque	$Ca \bullet a'$	Q.E.D.

Teorema 5[18].

Per ogni a, b elementi di T: $b \in \underset{\cdot}{A} \bullet \supset \bullet a \underset{\cdot}{\in} \mathrm{B}$.

Prova: Per ogni c elemento di K:

$b \in \underset{\cdot}{A} \bullet \supset \bullet Cb \bullet c \equiv \mathrm{C}a \bullet c$ (assioma 11)

$Cb \bullet c \equiv \mathrm{C}a \bullet c \bullet \supset \bullet a \in \mathrm{B}$ (assioma 11)

dunque $b \in \underset{\cdot}{A} \bullet \supset \bullet a \in \mathrm{B}$ Q.E.D.

Teorema 6.

Per ogni a, $a°$, b elementi di T e per ogni b' elemento di B: $(a < b < a°) \bullet (a < b'): \supset \bullet a° < b'$.

Prova:

$a < b \bullet \supset \bullet \sim (b < a)$ (assioma 12)

sia $(a < b < a°) \bullet (a < b' < a°)$

e sia $a < b < b' < a°$ oppure $a < b' < b < a°$

ma $(\exists a') : \sim(b < a < b') \bullet \supset \bullet (b < a' < b')$ (assioma 14)

e $b' \in \underset{\cdot}{\mathrm{B}} \bullet \supset \bullet b \in \mathrm{B}'$ (teorema 5)

allora $\sim(b' < a < b) \bullet \supset \bullet b' < a' < b$ (assioma 14)

ma $(a < b < b' < a°) \bullet (b < a' < b') \bullet \supset \bullet a < a' < a°$

e $(a < b' < b < a°) \bullet (b' < a' < b) \bullet \supset \bullet a < a' < a°$

contrario all'assioma 15.

Dunque $(a < b < a°) \bullet (a < b'): \supset \bullet a° < b'$ Q.E.D.

Teorema 7.

Per orni a, b, c, $a°$, $b°$ elementi di T: esiste un $c°$ elemento di C tale che $(a < b < a° < b°) \bullet (a < c < b): \supset \bullet (a° < c° < b°)$.

Prova:

$(a < c < b) \bullet (b < a°): \supset \bullet a < c < a°$ (assioma 13)

e $(\exists c') : \bullet (c < b) \bullet (b < b°): \supset \bullet b < c' < b°$ (assioma 14)

ma $\sim(a < c < c' < a°)$ (teorema 6)

dunque$a° < c' < b°$.

Lemma: per ogni x elemento di C diverso da c e da c':

$(a < c < a°) \bullet \supset \bullet \sim(a < x < a°)$ (teorema 6)

$(b < c' < b°) \bullet \supset \bullet \sim(b < x < b°)$ (teorema 6)

---

18) Per amore di brevità nelle seguenti prove si useranno i simboli $\in$, $\supset$, $\exists$ rispettivamente per "è membro di", "implica", "esiste".

allora	$c < x \bullet \supset \bullet c' < x$	(teorema 6 e ipotesi)
e	$x < c' \bullet \supset \bullet x < c$	(teorema 6 e ipotesi)
quindi	$c = c°$	(assioma 15)
perciò	$(a < b < a° < b°) \bullet (a < c < b) : \supset \bullet a° < c° < b°$	Q.E.D.

3.1.5 Alcune considerazioni.

Esistono probabilmente molte altre relazioni tra gli elementi musicali che possono essere derivate dal sistema di postulati. Tuttavia, perfino uno sviluppo completo di tale sistema non può che condurci a delle possibilità *generali* o essenziali della musica.

Le particolari strutture impiegate nella musica occidentale, esigono comunque ulteriori specificazioni, come:

1. l'assioma *successore* per la serie generata da <;
2. la determinazione di altri intervalli consonanti oltre che unisono e ripetizione;
3. l'introduzione delle T-funzioni # e b ed altre.

Imponendo differenti restrizioni sulla classe originale K, è possibile ottenere altri tipi di musiche. Ad esempio, un insieme di postulati per la musica hawaiiana dovrebbe contenere un assioma *serie-continua,* piuttosto che l'assioma *successore* per le frequenze. Nella musica gaelica, toni adiacenti della scala non producono dissonanze come invece nella scala diatonica. Nell'armonia greca antica, la terza maggiore era trattata come dissonanza. C'è un altro punto di interesse in questo tentativo di determinazione della struttura logica dell'universo musicale, un problema filosofico. Non sarebbe forse possibile applicare questo tipo di struttura anche ad altre forme artistiche e trovare così un terreno comune di confronto tra discipline apparentemente incommensurabili? Le implicazioni di tale ipotesi sarebbero, per la filosofia dell'arte, chiaramente vitali. Psicologia e metafisica hanno fallito nel tentativo di sistemare l'estetica su una base diversa da quella empirica; non potrebbe forse la logica colmare il vuoto tra le due discipline e trovare i principi fondamentali su cui costruire una scienza dell'estetica? L'articolo di Susanne K. Langer si chiude proprio con queste domande ma lasciando la questione aperta. Nel successivo paragrafo si vedrà come l'approccio ora descritto, per quanto incompleto e carico di idiosincrasie, sia stato perfezionato e migliorato giungendo ad una vera e propria teoria insiemistica della musica.

3.2 La musica da un punto di vista insiemistico.

La metodologia suggerita dalla Langer, esaminata nel paragrafo precedente, soffre in realtà di una sopravvalutazione del parametro armonico a discapito della struttura contrappuntistica, rifiutando *l'aspetto temporale* nella sua totalità. Tale mancanza risulta ben visibile nel momento in cui si tenta di applicare la cosiddetta "algebra astratta" da lei sviluppata ad un qualunque testo musicale. Nonostante questo però, rimane nell'idea di Susanne Langer qualcosa di profondamente interessante e potente. Quando si ha a che fare con una struttura musicale, sia come compositori, esecutori, musicologi, critici o come semplici ascoltatori, in realtà si ha a che fare con una struttura astratta analizzabile in termini insiemistici. Brevemente, è possibile azzardare l'ipotesi per cui la classe di tutte le strutture musicali, in un senso ragionevolmente limitato, formi una specifica classe di strutture insiemistiche nel senso *standard* del termine. Il nostro obiettivo dunque sarà fare qualche passo nella direzione di una adeguata caratterizzazione di tale classe che chiameremo **sistema musicale astratto.**

E' difficile dire a quale disciplina appartenga un approccio simile: in primo luogo tale indagine prende a prestito vari contributi dall'estetica musicale (intesa come filosofia, ontologia, metafisica) ed in definitiva tende a dare una risposta all'annosa questione dell'estetica: che cos'è un'opera d'arte? (O per lo meno cerca di farlo in ambito musicale).
In secondo luogo, questa analisi può interessare la musicologia in quanto strumento metodologico per la definizione scientifica dei suoi stessi fondamenti, creando così una forma *pura* o *astratta* della disciplina.
Susanne Langer, alla fine del suo articolo si chiede:

"la musica non è la sola interpretazione per questa algebra [...]; non è possibile infatti che alcuni logici versati nelle arti, in special modo in altre arti piuttosto che nella musica, possano tracciare simili strutture in altre forme di espressione?"

Probabilmente la congettura a proposito della generalizzazione della sua struttura logica alle altre arti non è completamente priva di significato. In accordo con la seguente analisi, si potrà infatti definire una struttura musicale come una *distribuzione complessa di un certo materiale (es. 'frequenze') su un intervallo di tempo propriamente suddiviso;* allo stesso modo possiamo pensare la pittura o il disegno come la distribuzione di un certo materiale (es. 'colori') su un spazio bidimensionale diviso ancora una volta in aree in un modo appropriato. La scultura e l'architettura si possono intendere come un'analoga distribuzione di materiale in uno spazio a tre dimensioni, e così via. Se tali considerazioni risultano essere corrette, la familiare nozione insiemistica di partizione (suddivisione) di un insieme e la corrispondente relazione di equivalenza – come anche quella di distribuzione di un insieme su un altro – svolgono un ruolo di primaria importanza in ciò che la Langer chiama una "scienza razionale dell'estetica".

3.2.1 Sistemi musicali astratti.

Con **frame temporale limitato** si intende una quadrupla ordinata <T, t-, -t, ≤> dove T è un insieme non vuoto, intuitivamente, di "punti-tempo" con t- e -t come membri distinti di esso: il primo e l'ultimo elemento di T rispettivamente; e dove ≤ è una relazione binaria su T di precedenza o coincidenza con, che definiamo *ordinamento lineare* di T.
Più esplicitamente un frame temporale è una struttura <T, t-, -t, ≤> che soddisfa i seguenti assiomi, per ogni t, t', t'' in T:

T1. $T \neq \emptyset$
T2. $t\text{-}, \text{-}t \in T$
T3. $t\text{-} \neq \text{-}t$
T4. $\leq\ \in T \times T$
T5. $t\text{-} \leq t$ (t- ≤ - primo in T)
T6. $t \leq \text{-}t$ (-t ≤ - ultimo in T)
T7. $t \leq t$ (riflessività in T di ≤)
T8. se $t \leq t'$ e $t' \leq t''$ allora $t \leq t''$ (transitività in T di ≤)
T9. se $t \leq t'$ e $t' \leq t$ allora $t = t'$ (antisimmetria in T di ≤)
T10. $t \leq t'$ oppure $t' \leq t$ (connessione forte in T di ≤)

Ancora, con **frame frequenziale limitato** intendiamo una quintupla ordinata <P, p-, -p, §, ≤> dove P è un insieme non vuoto, intuitivamente, di "frequenze" (nel senso di possibili posizioni del suono su alcune scale tonali, con p- e -p come suoi primo ed ultimo elemento rispettivamente) dove § è qualcosa non in P (euristicamente la "frequenza nulla"), e dove ≤ è

una relazione binaria su P di minore di o uguale a, che definiamo *ordinamento lineare* di P.
Un frame frequenziale dovrà allora soddisfare, per ogni p, p', p'' in P, gli assiomi P1 – P10 ottenuti in perfetta analogia con gli assiomi T1 – T10 sopra esposti ed il seguente assioma addizionale:

P11. $\S \notin P$

Si dirà **frame musicale** la struttura $\langle\langle T, t-, -t, \leq\rangle, \langle P, p-, -p, \S, \leq\rangle, V\rangle$ tale che:

(i) $\langle T, t-, -t, \leq\rangle$ è un frame temporale
(ii) $\langle P, p-, -p, \S, \leq\rangle$ è un frame frequenziale
(iii) V è un insieme finito e non vuoto di "voci" o "parti" (es. contralto, ecc.)

Con **frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente** definiremo allora una struttura $F = \langle\langle T, t-, -t, \leq\rangle, \langle P, p-, -p, \S, \leq\rangle, V, S_v\rangle$ tale che:

(i) $\langle\langle T, t-, -t, \leq\rangle, \langle P, p-, -p, \S, \leq\rangle, V\rangle$ è un frame musicale
(ii) S_v è un "selettore di punto" su tale frame nel senso di una funzione da V all'insieme potenza di T tale che per ogni $v \in V$:

(ii.i) S_v è un sottoinsieme finito di T
(ii.ii) t- a -t esistono entrambi in S_v

Ogni S_v verrà definito come *selettore di punto* su T; così S determina una famiglia indicizzata di selettori su T il cui insieme indice è precisamente V. Grazie alla finitezza di ogni selettore di punto ed alla linearità di $\leq$, la seguente rappresentazione è ovviamente sempre definibile. Per ogni S_v esiste un numero naturale k > 0 tale che

$S_v = \{t^v_0, t^v_1, ..., t^v_k\}$

dove $t^v_0 = t-$ e $t^v_k = -t$, e dove per ogni i, j tali che $0 \leq i \leq j \leq k$ abbiamo $t^v_i \leq t^v_j$ così che la funzione di ordinamento temporale con *precedenza stretta* tra i membri di S_v è preservato dall'ordinario "minore di" tra gli indici numerici. Qui l'ordinamento temporale con precedenza stretta < è definito, mediante la condizione per ogni t, t1 in T:

$t < t1$ se e solo se $t' \,!\leq t$

Si consideri ora una selezione arbitraria $S_v = \{t^v_{0,}\ \ldots, t^v_k\}$ per $v \in V$. Per ogni i tale che $0 \leq i \leq k$, definiamo

$t^{vect\,(v)}_i = \{t \in T: t^v_i \leq t \leq t^v_k\}$ per $i < k$
$t^{vect\,(v)}_i = \{t^v_k\}$ altrimenti (cioè per $i = k$)

e $\phi\,(S_v) = \{t^{vect\,(v)}_i: 0 \leq i \leq k\}$.
Quando $i < k$, $t^{vect\,(v)}_i$ è definibile come **segmento temporale** che comincia t^v_i ed è *diretto* verso t^v_{i+1} (senza contenerlo come membro). Possiamo altrimenti definire $t^{vect\,(v)}_i$ come un **intervallo di tempo aperto a destra**. Ci sono innumerevoli ragioni, nel dominio musicale per adottare esplicitamente la definizione di tali segmenti temporalmente direzionati, o intervalli di tempo. Invece quando $i = k$, $t^{vect\,(v)}_i$ esemplifica il caso degenere di "segmento nullo", sempre definibile come *l'insieme unità del punto finale -t* in T. Pertanto, $\phi\,(S_v)$ è l'insieme di tutti i segmenti temporali direzionati determinati da S e v; si noti che, per ogni $v \in V$, $\phi\,(S_v)$ è una **partizione** di T in celle disgiunte ed esaustive ed è linearmente ordinato dalla relazione «== tale che t^v_i «== t^v_j se e solo se $i \leq j$ $(0 \leq j, j \leq k)$.
Infine, dato ogni selettore di punto su S in un frame musicale, è sempre possibile formare l'insieme unione $\cup_{v\,\in\,V}\ S_{v,}$ ovvero l'unione di tutte le selezioni S_v per $v \in V$. Tale insieme unione sarà sempre un sottoinsieme finito di T contenente t- e -t e quindi rappresentabile ed ordinabile da < come ognuno degli S_v individualmente. Inoltre è sempre possibile definire ϕ $(\cup_{\,v\,\in\,V})$ allo stesso modo usato per S_v. La cardinalità (numero di elementi) di $\cup_{\,v\,\in\,V}\ S_{v,}$ dipenderà in modo costante da quella di S_v; sarà almeno uguale alla cardinalità del più grande S_v e solitamente più grande.

Sia F = <<T, t-, -t, $\underline{<}$>, <P, p-, -p, §, $\underline{<}$>, V, S> un frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente. Con **specificazione melodico-ritmica su F** intenderemo allora la coppia ordinata <On, Att> di funzioni su V tali che per ogni $v \in V$:

(i) $On_v \subseteq T \times (P \cup \{\S\})$

(ii) $Att_v \subseteq T \times (P \cup \{\S\})$

Qui, si intende On_v come la relazione binaria tra punti-tempo e frequenze tale che:

per ogni $t \in T$ e per ogni $p \in P \cup \{\S\}$, $<t, p> \in On_v$ se e solo se la frequenza p è *attiva* o *suona* nella voce v all'istante t. $<t, \S>$ è definito in On_v solo nel caso in cui non vi siano frequenze "positive" $p \in P$ tali che $<t, p> \in On_v$. Ancora, intenderemo Att_v come la relazione binaria tra punti-tempo e frequenze tale che per ogni $t \in T$ ed ogni $p \in (P \cup \{\S\})$, $<t, p> \in Att_v$ se e solo se la frequenza p *attacca* o *entra* in v all'istante t. Ogni specificazione melodico-ritmica $<On, Att>$ su F deve soddisfare i seguenti assiomi, dove v è ogni membro di V e $S_v = \{t^v_0, ..., t^v_k\}$:

MR1. Per ogni i con $0 \leq i \leq k$ esiste esattamente un $p \in (P \cup \{\S\})$ tale che per tutti $t \in t^{vect\,(v)}_i$: $<t, p> \in On_v$.
MR2. Per ogni i con $0 \leq i \leq k$: $<t, \S>$ è definito in On_v per ogni $t \in t^{vect\,(v)}_i$, se e solo se per ogni $t \in t^{vect\,(v)}_i$ ed ogni $p \in P$ "positivo", $<t, p> \notin On_v$.
MR3. Per ogni $t \in T$ e ogni $p \in (P \cup \{\S\})$: $<t, p> \in Att_v$ se $<t, p> \in On_v$ ($Att_v \subseteq T \times (P \cup \{\S\})$).
MR4. Per ogni $t \in S_v$ esiste esattamente un $p \in (P \cup \{\S\})$ tale che $<t, p> \in Att_v$.
MR5. Per nessun $t \in (T - S_v)$ e nessun $p \in (P \cup \{\S\})$ varrà $<t, p> \in Att_v$.

Spiegazione. MR1 afferma che per ogni intervallo di tempo $t^{vect\,(v)}_i$ ($0 \leq i \leq k$) in $\phi\,(S_v)$ esiste un' unica frequenza p in $(P \cup \{\S\})$ che è attiva o suona senza interruzione in v durante l'intero $t^{vect\,(v)}_i$; MR3 e MR4 implicano che tale frequenza p "attacchi" in v al principio di $t^{vect\,(v)}_i$, cioè all'istante t^v_i e MR5 implica che tale p non può aver punto di attacco in v in nessun altro punto dell'intervallo. MR2 asserisce che la "frequenza nulla" § è attiva in v senza interruzione durante l'intero $t^{vect\,(v)}_i$ solo nel caso in cui non vi sia alcuna frequenza positiva p in P attiva in v in qualche punto di $t^{vect\,(v)}_i$, ovvero solo nel caso ci sia completo silenzio in v durante tutto l'intervallo di tempo; ancora, MR3 e MR4 implicano qui che tale silenzio (o pausa) attacchi in v all'istante t^v_i, mentre MR5 che ciò non accade in alcun punto durante quel segmento temporale. MR3 afferma inoltre che Att_v è sempre un sottoinsieme di On_v. Infine, MR4 e MR5 insieme asseriscono che l'attacco

delle frequenze accade in v *precisamente* nei punti t^v_i ($0 \leq i \leq k$) in S_v ed in nessun altro punto in T.
Si consideri ora la relazione binaria ON_v ($\subseteq$ T X (P $\cup$ {§})) tra intervalli di tempo e frequenze tale che per ogni $t^{vect\,(v)}{}_i$ ($0 \leq i \leq k$) in ϕ (S_v) e ogni p in (P $\cup$ {§}): <$t^{vect\,(v)}{}_i$, p> $\in$ ON_v se e solo se per ogni t $\in$ $t^{vect\,(v)}{}_i$, <t, p> $\in$ $On_{v.}$
Intuitivamente, tale relazione vale solo tra $t^{vect\,(v)}{}_i$ e p solo nel caso in cui (per gli assiomi) p sia attiva in v senza interruzione durante l'intero $t^{vect\,(v)}{}_i$ e attacchi inoltre all'inizio di $t^{vect\,(v)}{}_i$ ed in nessun altro punto dell'intervallo. Inoltre, MR1 assicura che ON_v sia una funzione da ϕ (S_v) a (P $\cup$ {§}), per cui è possibile scrivere

ON_v ($t^{vect\,(v)}{}_i$) = p

per asserire il fatto che <$t^{vect\,(v)}{}_i$, p> $\in$ $On_{v.}$
Con **sistema musicale astratto**, possiamo ora finalmente definire una struttura M = <F, <On, Att>> con F = <<T, t-, -t, $\leq$>, <P, p-, -p, §, $\leq$>, V, S> tale che:

(i) F è un frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente;
(ii) <On, Att> è una specificazione melodico-ritmica su F.

Sia M = <F, <On, Att>> un qualunque sistema musicale astratto. Per ogni v $\in$ V, possiamo spiegare il **corso musicale degli eventi in v in M** precisamente come la funzione o sequenza ON_v (determinata da <On, Att> e F). In simboli: cme (v, M) = ON_v . Con **tessitura** di M definiamo l'insieme di corsi musicali degli eventi in v in M per v$\in$ V. In simboli:

Tess (M) = {ON_v: v $\in$ V} (= {cme (v, M'): M' = M e v $\in$ V}).

Si consideri $\cup_{v \in V} S_v$, (in relazione ad ogni M come sopra), lo si rappresenti come {t^v_0, t^v_1 , ..., t^v_k } (dove k dipende dalla grandezza di ogni S_v, nel modo indicato sopra) e sia ϕ ($\cup_{v \in V} S_v$) = {$t^{vect\,(v)}{}_i$: $0 \leq i \leq k$}. MR1 allora implica che per *ogni* v $\in$ V e per ogni i fra 0 e k^- c'è almeno una frequenza positiva p in P tale che per ogni t $\in$ $t^{vect\,(v)}{}_i$: <t, p> $\in$ $On_{v.}$
Inoltre, se un tale p esiste in una data voce v in V, da ciò non segue che <t, p> $\in$ Att_v semplicemente perché t_i ($\in \cup_{v \in V} S_v$) può non appartenere all' S_v dato (ad esempio una pausa può entrare in qualche altra voce al tempo t_i).

Questo fatto ci permette di definire per ogni segmento $t^{vect\,(v)}_i$ $(0 \leq i \leq k)$ in $\phi(\cup_{v \in V} S_v)$ **l'accordo presente in $t^{vect\,(v)}_i$ in M** come l'insieme delle frequenze positive in P ognuna delle quali "suona" in qualche voce in V durante l'intero $t^{vect\,(v)}_i$.
Più precisamente,

$Acc\,(t^{vect\,(v)}_i, M) = \{p \in P$: esiste un v in V tale che per ogni $t \in t^{vect\,(v)}_i$, $<t, p> \in On_v\}$.

Si noti che $Acc\,(t^{vect\,(v)}_i, M)$ può essere uguale all'insieme vuoto: in tal caso avremo ciò che è comunemente noto come G.P. ovvero una grande pausa durante l'intero intervallo $t^{vect\,(v)}_i$. Infine, con **progressione armonica in M** avremo l'insieme, o sequenza, di $Acc\,(t^{vect\,(v)}_i, M)$ per $t^{vect\,(v)}_i \in \phi(\cup_{v \in V} S_v)$, cioè per $0 \leq i \leq k$.

Assumendo allora che un brano musicale possa essere rappresentato come un sistema musicale astratto nel senso tecnico descritto, possiamo suggerire che il **contrappunto** sia lo studio della sua tessitura, che consiste del corso degli eventi musicali in voci distinte visti in combinazione gli uni con gli altri, mentre l'**analisi armonica** sia lo studio delle sue progressioni armoniche nella totalità o in parte.

3.2.2 Sistemi musicali astratti temporalmente quantificati.

Sia $F = <<T, t\text{-}, \text{-}t, \leq>, <P, p\text{-}, \text{-}p, \S, \leq>, V, S>$ un qualsiasi frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente.
Con **misurazione della durata** o **lunghezza temporale su F**, intendiamo la quadrupla ordinata $<E, L, E^+, m>$ dove:

(i) E ed L sono le relazioni binarie "*è della stessa lunghezza*" e "*è più corto di*" rispettivamente, nell'insieme $\cup_{v \in V} \phi(S_v) \cup \phi(\cup_{v \in V} S_v)$ degli intervalli di tempo determinati da V ed S;
(ii) E^+ è una relazione ternaria su $\cup_{v \in V} \phi(S_v) \cup \phi(\cup_{v \in V} S_v)$ tale che per ogni x, y, z in tale insieme: $<x, y, z> \in E^+$ se e solo se x è della stessa lunghezza di y e z messi assieme (ovvero $E\,(x, y + z)$ = vero);
(iii) m è una *misura additiva* per la struttura $<\cup_{v \in V} \phi(S_v) \cup \phi(\cup_{v \in V} S_v), E, L, E^+>$ nel senso che è una funzione da $\cup_{v \in V} \phi(S_v) \cup \phi(\cup_{v \in V}$

S_v) in un qualche sottoinsieme dei numeri reali non negativi tale che per tutti gli x, y, z in $\cup_{v \in V} \phi (S_v) \cup \phi (\cup_{v \in V} S_v)$:

1) m (x) = m (y) se e solo se $<x, y> \in E$
2) m (x) < m(y) se e solo se $<x, y> \in L$
3) m (x) = m (y) + m (z) se e solo se $<x, y, z> \in E^+$

Commenti. E' necessario che le relazioni appena definite valgano non solo sull'unione di tutti gli insiemi - intervallo ϕ (S_v), per v in V, ma anche nell'insieme risultante dall'addizione a ϕ (S_v) ogni membro dell'insieme intervallo ϕ ($\cup_{v \in V} S_v$). Questa condizione è piuttosto debole, se non minimale, ma è necessaria per far sì che m possa adeguatamente misurare la lunghezza degli intervalli di tempo dati da V ed S. Inoltre, per rendere completa la nozione di misurazione della durata in F, è necessario che E, L, ed E^+ soddisfino certe condizioni minime per l'esistenza di una misura additiva per $<\cup_{v \in V} \phi (S_v) \cup \phi (\cup_{v \in V} S_v), E, L, E^+>$. Per esempio E deve possedere una relazione di equivalenza in $\cup_{v \in V} \phi (S_v) \cup \phi (\cup_{v \in V} S_v)$, L deve essere un ordine parziale stretto in tale insieme e così via[19].

A tali condizioni si deve anche aggiungere quella per cui il "segmento nullo" -t sia tale che $<$vect (-t), vect (-t),vect (-t)$> \in E^+$ e dunque (per la (iii:3) sopra) m (vect (-t)) = 0. E' inoltre necessario che vect (-t) sia *l'unico* membro di $\cup_{v \in V} \phi (S_v) \cup \phi (\cup_{v \in V} S_v)$ che soddisfa tale condizione. L'effetto di questa condizione si evince da quanto segue: non abbiamo finora mai escluso la possibilità che T possa essere preso come una serie finita di momenti "discreti"; nei casi in cui T è appunto così configurato, la condizione sopra esposta impone una ragionevole restrizione sulla scelta del selettore di punto S; in breve, deve essere tale per cui la cardinalità di $\cup_{v \in V}$ (S_v) sia almeno pari alla cardinalità di T divisa per 2 (se la cardinalità di T è pari) e o a quella di T + 1 divisa per due (se dispari). Ora, con **sistema musicale astratto temporalmente quantificato**, possiamo definire una struttura M = <F, <On, Att>, <E, L, E^+, M>> tale che:

19) Si rimanda a Wedberg (1963) per migliori chiarimenti.

(i) <F, <On, Att>> sia un sistema musicale astratto;
(ii) <E, L, E^+, M> sia la misurazione della durata di F.

Si noti che, data ogni coppia di sistemi musicali astratti temporalmente quantificati o no, le condizioni per cui risultano *identici* o *distinti* rispettivamente, sono quelle standard della teoria degli insiemi.
Ciò non significa, comunque, che non ci siano difficili problemi di identità dei sistemi musicali astratti, come si presentano nella pratica. Ancora, da ciò emerge che la notazione musicale standard occidentale fornisce, tra le altre cose, informazioni riguardanti la quantificazione temporale di sistemi musicali nel senso appena definito.

3.2.3 Ritmo e melodia nei sistemi musicali astratti.

Sia F = <<T, t-, -t, ≤>, <P, p-, -p, §, ≤>, V, S> un qualsiasi frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente e sia v un qualunque membro di V; si consideri $S_v = \{t^v_{0,}\ t^v_{1\ ,}\ ...,\ t^v_k\}$ e $\phi\ (S_v)$. Ogni funzione f da $\phi\ (S_v)$ a $P \cup \{\S\}$ è detta **corso musicale possibile degli eventi in v su F** se e solo se f = ON_v per qualche specificazione melodico–ritmica <On, Att> su F.
Sia poi $CMPE_{v,\ F}$ di tutti i corsi musicali possibili degli eventi in v su F. Ancora, siano f e g due membri di $CMPE_{v,\ F}$: allora f = ON_v e g = ON'_v per alcune specificazioni melodiche <On, Att> e <On', Att> su F, rispettivamente. Diremo che f *esibisce lo stesso pattern ritmico di g (f ~ g)* se e solo se per ogni i con $0 \leq i \leq k$: $ON_v\ (t^{vect\ (v)}_i) = \S$ se e solo se $ON'_v\ (t^{vect\ (v)}_i) = \S$.
La relazione ~ è chiaramente una relazione di equivalenza in $CMPE_{v,\ F}$ (riflessiva, transitiva e simmetrica): f ~ g significa che c'è una pausa sia in f che in g durante esattamente lo stesso intervallo $t^{vect\ (v)}_i$ in $\phi\ (S_v)$. Si consideri un'arbitraria specificazione melodico–ritmica <On, Att> su F, che determina un sistema musicale astratto M = <F, <On, Att>> ed anche il corso musicale degli eventi in v in M, ovvero ON_v (= cme (v, M)).
Con **pattern ritmico esibito da ON_v** (o anche il ritmo di ON_v) intenderemo allora la classe di equivalenza $[ON_v]\sim$ (= $\{f \in CMPE_{v,\ F}: f \sim ON_v\}$), ovvero l'insieme di tutti i possibili corsi musicali degli eventi f in $CMPE_{v,\ F}$ tale che f esibisce lo stesso pattern ritmico di ON_v. Inoltre, sia M = <F, <On, Att>> un qualunque sistema musicale astratto tale che vi siano almeno due voci in

V. Allora, per ogni coppia v, v' in V la relazione "v e v' *esibiscono lo stesso pattern ritmico nei loro rispettivi corsi musicali degli eventi"* (in M) sarà automaticamente definita dalla condizione per cui $[ON_v]\sim = [ON'_v]\sim$. Possiamo facilmente verificare che tale condizione vale tra v e v' solo nel caso in cui (i) i selettori di punto S_v e $S_{v'}$ sono identici e (ii) ON_v e $ON_{v'}$ abbiano la stessa distribuzione di pause su ϕ (S_v).
Se ciò che è stato affermato è corretto, dovrebbe essere chiaro che il ritmo non dipende solamente dalla partizione temporale di T indotta nella voce v dal selettore S insieme alla funzione ϕ: è ugualmente importante conoscere come le pause sono distribuite da ON_v sulla partizione ϕ (S_v). D'altra parte, quando una frequenza positiva è attiva in un dato intervallo, la sola cosa che ha importanza e che *qualche* frequenza sia attiva, non *quale*. Forse allora, è possibile ipotizzare che **il ritmo induce una completa astrazione dalla identità delle frequenze**. Ciò spiegherebbe il motivo per cui alcuni strumenti percussivi ad altezza indefinita (es. tamburo) possono produrre significativamente dei pattern ritmici.
Sia $F = \langle\langle T, t\text{-}, \text{-}t, \leq\rangle, \langle P, p\text{-}, \text{-}p, \S, \leq\rangle, V, S\rangle$ un qualsiasi frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente ed $F' = \langle\langle T, t\text{-}, \text{-}t, \leq\rangle, \langle P, p\text{-}, \text{-}p, \S, \leq\rangle, V, S'\rangle$ un qualsiasi frame differente da F al massimo per S' diversa da S. Sia v in V. Si dirà che F è **isodifferente da F' al massimo in v ($F' \approx_v F$)** solo nel caso in cui:

(i) $S_w = S'_w$ per ogni $w \in V$ tale che $w \neq v$, e
(ii) S_v è **isomorfa** ad S'_v nel senso che esiste una funzione biunivoca h (uno a uno) da S_v a S'_v che preserva l'ordinamento di <; ovvero, per ogni t, t' in S_v si ha $t < t'$ se e solo se $h(T) < h(t')$.

Ora, dati F e v come sopra, sia $\mathcal{CMPE}_{v,F} = \cup_{F' \approx v, F} CMPE_{v,F'}$; ovvero sia l'unione di tutti gli insiemi dei possibili corsi musicali degli eventi in v in F' per ogni F' isodifferente da F al massimo per v. Siano f e g due membri qualsiasi di $\mathcal{CMPE}_{v,F}$ questa volta: allora $f' = ON'_v$ per qualche specificazione melodico – ritmica <On', Att'> su F' con $F' \approx_v F$ e $g = ON''_v$ per qualche specificazione melodico – ritmica <On", Att"> su F" con $F'' \approx_v F$. Poiché $\approx_v$ è chiaramente una relazione di equivalenza, avremo che $F' \approx_v F''$.
Ancora, $F' = \langle\langle T, t\text{-}, \text{-}t, \leq\rangle, \langle P, p\text{-}, \text{-}p, \S, \leq\rangle, V, S'\rangle$ e
$F'' = \langle\langle T, t\text{-}, \text{-}t, \leq\rangle, \langle P, p\text{-}, \text{-}p, \S, \leq\rangle, V, S''\rangle$, dove

$S'_v = \{t^v_0, t^v_1, ..., t^v_k\}$ e dove esiste la relazione h di < che preserva una corrispondenza uno a uno tale che $S''_v = \{h(t^v_0), h(t^v_1), ..., h(t^v_k)\}$. Si dirà allora che f *esibisce lo stesso moto melodico (linea) di g ($f \approx g$)* se e solo se per ogni i con $0 \leq i \leq k$: $ON'_v (t^{vect(v)}_i) = ON''_v\ vect((h(t^{vect(v)}_i)))$; dove:

$vect((h(t^{vect(v)}_i))) = \{t \in T: h(t^{vect(v)}_i)) \leq t \leq h(t^{vect(v)}_{i+1}))\}$ per $i < k$;
$vect((h(t^{vect(v)}_i))) = \{-t\}$ altrimenti.

$\approx$ risulta in effetti essere una relazione d'equivalenza in $\mathcal{CMPE}_{v, F.}$
Infine, essendo <On, Att> una qualunque specificazione melodico–ritmica su F tale che il corso musicale degli eventi ON_v in v sia determinato, definiremo **movimento melodico** esibito da ON_v la classe di equivalenza $[ON_v]_{\approx} = \{f \in \mathcal{CMPE}_{v, F} : f \approx ON_v\}$, ovvero l'insieme di tutti i possibili corsi musicali degli eventi f tali che f esibisca lo stesso moto melodico di ON_v. Inoltre, quando f e g sono membri di $\mathcal{CMPE}_{v, F}$ tali che $f \approx g$ e rispettivamente definite con riferimento ad S' e ad S'' come sopra, possiamo parlare di g come *dell'aggiustamento* di f su S'' e di f come *dell'aggiustamento* di g su S'.
Secondo l'approccio delineato in questi paragrafi, basato in verità su una sola e semplice idea, la cosa cruciale in connessione con il moto melodico esibito dal corso musicale degli eventi in una voce è *quali frequenze succedono quali*, ovvero la conservazione della "giusta" successione delle frequenze. Di fatto, la lunghezza degli intervalli di tempo durante i quali queste "giuste" frequenze suonano è del tutto irrilevante, ammesso che tali intervalli siano di una qualche lunghezza diversa da zero.

Osservazione. Il concetto di movimento melodico sopra descritto non è l'unico possibile. Si consideri ad esempio l'operazione musicale di 'trasposizione'. Il risultato di tale operazione è un nuovo sistema musicale astratto i cui frame musicali con partizioni temporali indicizzate vocalmente sono identici a quelle del sistema di partenza (data ovviamente la validità del sistema temperato che permette "trasposizioni illimitate").
La differenza sta nel fatto che il nuovo sistema ha una nuova specificazione melodico–ritmica su tali frame (es. <On#, Att#>), che è funzionalmente in relazione con <On, Att>.
E' evidente che i pattern ritmici esibiti dai corsi musicali degli eventi nelle voci del sistema trasposto rimangono identici a quelli esibiti nel sistema originale. D'altra parte, i movimenti melodici del sistema trasposto saranno

distinti da quelli originali, poiché la successione delle frequenze in tale sistema non è identiche a quella del vecchio sistema a causa dell'operazione di trasposizione. Ma non è legittimo affermare che il movimento melodico è *preservato* rispetto all'operazione di trasposizione, cioè rimane lo stesso nelle rispettive voci? Effettivamente lo è: per questo il sistema presentato dovrebbe essere integrato da un' analisi di un nuovo concetto di movimento melodico, basato su un isomorfismo che preservi non solo la relazione $\leq$ tra le frequenze positive, ma anche gli intervalli nel familiare senso di differenze tra i suoni (ovvero di distanze tra frequenze). Tale analisi non può essere portata a compimento finché la nozione di sistema musicale astratto *quantificato rispetto alle frequenze positive* non verrà definita: per farlo dovremmo sviluppare un adeguato concetto di misurazione della differenza tra frequenze su un frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente.

3.2.4 Sulla perfetta istanziazione di sistemi musicali astratti.

Sia $M = \langle F, \langle On, Att\rangle\rangle$ un sistema musicale astratto. Sia W un insieme non vuoto di *possibili situazioni (mondi possibili)* e si consideri un membro arbitrario w di W.
Con **perfetta concretizzazione rispetto a w di M ($PerfConc_w$ (M))**, intendiamo la struttura $M^w = \langle\langle\langle T^w, t\text{-}^w, \text{-}t^w, \leq^w\rangle, \langle P^w, p\text{-}^w, \text{-}p^w, \S^w, \leq^w\rangle, V^w, S^w\rangle, \langle On^w, Att^w\rangle\rangle$ tale che:

(i) $T^w = T \times \{w\}$
(ii) $t\text{-}^w = \langle t\text{-}, w\rangle$, $\text{-}t^w = \langle\text{-}t, w\rangle$ rispettivamente
(iii) $P^w = P \times \{w\}$
(iv) $p\text{-}^w, \text{-}p^w = \langle p\text{-}, w\rangle, \langle\text{-}p, w\rangle, \langle\S, w\rangle$ rispettivamente
(v) $V^w = V \times \{w\}$
(vi) $\leq^w$ è la relazione binaria su $T \times \{w\}$ tale che, per tutti t, t- in T: $\langle t, w\rangle \leq^w \langle t', w\rangle$ se e solo se $t \leq t'$
(vii) $\leq^w$ è la relazione binaria su $P \times \{w\}$ tale che, per tutti p, p- in P: $\langle p, w\rangle \leq^w \langle p', w\rangle$ se e solo se $p \leq p'$
(viii) S^w è la funzione da $V \times \{w\}$ nell'insieme potenza di $T \times \{w\}$ tale che, per ogni v in V ed ogni t in T: $\langle t, w\rangle \in S^w_{\langle v, w\rangle}$ se e solo se $t \in S_v$.
(ix) $\langle On^w, Att^w\rangle$ è una coppia di funzioni su $V \times \{w\}$ tali che, per ogni v in V, per ogni t in T e per ogni p in $P \cup \{\S\}$: $\langle\langle t, w\rangle, \langle p,w\rangle\rangle \in On^w_{\langle v, w\rangle}$

se e solo se $<t, p> \in On_v$ ed allo stesso tempo $<<t, w>, <p,w>> \in Att^w_{<v, w>}$ se e solo se $<t, p> \in Att_v$

La funzione $PerfConc_w$ (M) determina un isomorfismo per ogni w di W, proiettando in modo biunivoco M su M^w e preservando tutte le relazioni e le funzioni. Ora, con **modello musicale**, si definirà una tripla ordinata $\mu = <\mathcal{M}, W, ist>$ dove:

(i) $\mathcal{M}$ è un insieme di sistemi musicali astratti, come indicato sopra;
(ii) W è un insieme non vuoto di possibili situazioni (si può pensare ad un insieme di possibili performance);
(iii) ist $\subseteq$ {$PerfConc_w$ (M): $w \in W$ and $M \in \mathcal{M}$}, ovvero ist è un sottoinsieme selezionato di tutte le perfette concretizzazioni rispetto a w di M, per ogni w in W ed M in $\mathcal{M}$; è il risultato della scelta delle concretizzazioni *realmente esibite* in ogni w.

Ad esempio, sia M un sistema che definisce un particolare brano di Schumann e sia w una qualche situazione in cui, diciamo, Rubinstein esegue il brano di Schumann. Ogni realistico insieme ist sarà allora tale che $PerfConc_w$ (M) non è incluso in tale insieme poiché, in accordo con le osservazioni precedenti, non ci sono perfette concretizzazioni di M in nessuna performance *reale* (esse deviano dall'ideale per vari fattori). Ma l'insieme W potrebbe contenere "soltanto" alcune situazioni w' tali che $PerfConc_w$ (M) appartiene ad ist. Inoltre, sebbene $PerfConc_w$ (M) $\not\in$ ist, deve ragionevolmente esistere un sistema astratto M' che coincide perfettamente con l'esecuzione del brano di Schumann da parte di Rubinstein in w. Chiaramente, M' devierà da M per una serie di fattori e potremmo incontrare molte difficoltà nel definirlo adeguatamente; tuttavia non possiamo inferire la non-esistenza del sistema M'. Si noti che la nostra ipotesi a proposito di M', approfitta del fatto che per ogni w in W $PerfConc_w$ è un isomorfismo, così che l'inverso di tale funzione esiste. Intuitivamente ciò significa che, data una adeguata conoscenza della concretizzazione $PerfConc_w$ (M'), l'inverso della funzione di concretizzazione ci permette di tornare indietro e "recuperare" il sistema astratto M' originale. In sostanza, **la nostra conoscenza dei sistemi musicali non è basata esclusivamente sulla partitura di tali sistemi**, ma su una serie di altri fattori che dipendono dalla perfetta concretizzazione di tali sistemi. Una conclusione piuttosto ragionevole.

Dato un qualsiasi modello musicale $\mu = \langle \mathcal{M}, W, ist \rangle$ possiamo definire le seguenti nozioni. Diremo che per ogni $M \in \mathcal{M}$ ed ogni $w \in W$, M è **perfettamente istanziato in w ($\langle M, w \rangle \in$ PerfIst)** se e solo se $PerfConc_w(M) \in ist$. Ancora, con **possibile sistema musicale concreto su μ** intendiamo una coppia ordinata $\langle M, w \rangle$ tale che $M \in \mathcal{M}$ e $w \in W$ ($\langle M, w \rangle \in \mathcal{M} \times W$). Con **sistema concreto attuale su μ** intendiamo una coppia ordinata $\langle M, w \rangle$ tale che M sia perfettamente istanziato in w. L'insieme dei **sistemi concreti solamente possibili su μ** sarà invece $\mathcal{M} \times (W - PerfIst)$. Con **istanziazione attuale di un dato sistema astratto M**, infine, intendiamo ogni sistema musicale concreto $\langle M', w \rangle$ su $\mathcal{M}$ con $M' = M$.

3.2.5 Riepilogo delle nozioni introdotte.

Le sezioni 3.2.1 – 3.2.4 sviluppano la teoria secondo cui la classe delle strutture musicali è una specifica classe di strutture insiemistiche nel senso standard del termine. Si è cercato pertanto di dare un' adeguata caratterizzazione di tale struttura che chiamata SISTEMA MUSICALE ASTRATTO. Nelle sezioni 3.2.1 e 3.2.2 sono stati analizzati gli aspetti fondamentali di tale nozione, nella sezione 3.2.3 il concetto di ritmo e quello di melodia applicato ai sistemi musicali astratti. La sezione 3.2.4 infine, avvia una preliminare discussione sull'*istanziazione* di tali sistemi in una particolare situazione di performance.

3.3 L'approccio linguistico.

In un saggio del 1977 intitolato "On the moods of a Music Logic", Charles Seeger espone delle idee nella definizione di una base teorica della musica. Tale saggio risulta particolarmente interessante per via della prospettiva sulla musica che presenta, per aver per la prima volta affrontato il problema della descrizione della musica in termini di "logica del discorso" (logica che modella il pensiero associato al discorso) piuttosto che in termini di "logica musicale” (logica che modella il pensiero associato alla musica) e per la sua nuova concezione riguardo le progressioni musicali mediante astrazione del modo.

Si cercherà di ricostruire la posizione di Seeger, alla luce di alcune ricerche filosofiche sulla natura della logica. Nella sezione 3.3.1 vedremo come la posizione originale di Seeger sia basata sul Calcolo dei Predicati. Mancando una adeguata descrizione di tale logica, il suo lavoro si basa su un' analogia non necessaria con le leggi classiche del pensiero. Tale mancanza porta a chiedersi *'Cos'è la logica?' e 'Come possiamo differenziare le logiche musicali?'.*
Il matematico svedese Per Martin-Löf ha centrato la sua ricerca sulla prima di queste domande. Nella sezione 3.3.2 daremo una interpretazione della sua trattazione della logica e nella sezione successiva presenteremo una possibile forma generale per le logiche musicali. Nella sezione 3.3.4, daremo un semplice esempio di logica per illustrare le idee esposte. Si tenterà, al termine, una ricostruzione delle idee di Seeger alla luce delle scoperte fatte.

3.3.1 Rilevanza delle logiche classiche.

Secondo la definizione informale di Seeger, la logica musicale è “lo strumento che appare dentro o caratterizza l'ordine interno della musica come conosciuto dai suoi creatori”. Il pericolo insito in tale definizione, nota Seeger, è un paradosso di tipo terminologico–metodologico. Come prima cosa, non possiamo 'a parole' definire cosa sia l'ordine interno della musica. In secondo luogo, anche definendo tale ordine interno in modo formale, non potremmo provarne la correttezza se non sottomettendo la definizione ad un consenso 'parlato' dei musicisti. I progressi dell'informatica hanno in realtà mostrato la possibilità di risolvere tale paradosso; se possiamo implementare un sistema che cattura (almeno in parte) l'ordine interno della musica, possiamo sottomettere gli 'effetti' di tale sistema al consenso dei musicisti; questo appunto, è ciò che fa la AI-music. Se tale sforzo dovesse rivelarsi vincente, dovremmo comunque prestare attenzione a quali limitazioni comportano le concettualizzazioni 'a parole' della musica. In tali concettualizzazioni 'parlate' potremmo tentare di ridurre la rappresentazione della musica a unità come “oggetti” e “forme”.

Seeger sostiene che tali unità non possono essere indipendenti; perfino la singola linea melodica contiene una organizzazione multi-lineare. Questo ammonimento è stato spesso ignorato in molte applicazioni musicali su computer nelle quali, ad esempio, si sono esibite delle tassonomie gerarchiche per attribuire le qualità musicali a rappresentazioni strutturate della musica. Seeger prosegue tentando poi un' analogia con le cosiddette leggi del pensiero nella logica classica.
In tale tentativo, egli identifica come una corrispondenza rilevante quella tra la legge di identità e ciò che egli chiama '*identità in musica*', come una corrispondenza debole quella tra la legge di contraddizione e ciò che egli chiama '*seriazione in musica*' e quella tra la legge del terzo escluso e ciò che chiama '*varianza o compensazione in musica*':

Tab. T.3.1: Analogie di Seeger con la logica classica.

Legge	***Forma verbale***	***Notazione classica***	***Analogia***
IDENTITA'	Ciò che è, è	<A> = <A>	Identità
CONTRADDIZ.	Nulla può essere e non essere	<A> e NON <A> = falso	Seriazione
TERZO ESCLUSO	Tutto o è, oppure non è	<A> o NON <A> = vero	Compensazione (varianza)

Trasponendo le sue definizioni in una nuova terminologia:

(i) con **identità**, si intende la conoscenza di due o più 'oggetti' musicali associati dallo stesso effetto comunicativo o cognitivo;
(ii) con **seriazione**, si intende la conoscenza di due o più 'oggetti' musicali che variano rispettivamente nei termini dei loro modi;
(iii) con **compensazione**, si intende la conoscenza di due o più 'oggetti' musicali che si compensano l'un l'altro in un dato contesto o secondo una data procedura.

Tali analogie possono generare fraintendimenti. In ciò che segue mostreremo che i concetti di identità, seriazione e compensazione, così fondamentali nella visione di Seeger, possono in realtà essere intesi come 'primitivi' essi stessi. Vedremo poi come nella definizione di una logica musicale non siano necessarie le analogie di contraddizione e del terzo escluso.

3.3.2 Sul significato delle logiche.

Il matematico svedese Per Martin-Löf ha centrato la sua ricerca sulla ricostruzione delle logiche per la matematica, con il Calcolo dei Predicati come maggior esempio.
Molti dei principi esposti da questo ricercatore, portano delle somiglianze con le logiche 'parlate' esposte da Seeger. Secondo Martin-Löf neppure il logico matematico può trascurare gli aspetti più prettamente filosofici o fenomenologici della logica. Il punto principale della sua posizione è il seguente: **una teoria dei modelli data in termini di un linguaggio matematico alternativo non è semantica per un linguaggio solo se corredata di una giustificazione empirica o filosofica.** Questa distinzione appare molto vicina al paradosso terminologico–metodologico di Seeger, eccetto che per il fatto che nel caso della musica una giustificazione empirica o filosofica può essere ricavata soltanto nel senso estetico dei musicisti.

Centrale nella ricostruzione del Calcolo dei Predicati di Martin-Löf è la nozione di **giudizio**. I giudizi descrivono la forma della conoscenza di cui la logica si occupa.
Nel Calcolo dei Predicati la forma dominante di giudizio è di tipo affermativo, “A è vero”. Esiste anche una forma negativa, “A è falso” che dobbiamo attentamente distinguere da “(NON A) è vero”. Non tutte le forme di giudizio riguardano la verità o la falsità: il sistema di Martin-Löf contiene anche una forma del tipo “A è una proposizione”.

La prima cosa da fare nell'architettare una logica per una particolare applicazione è stabilire le corrette forme di giudizio. Le forme per la nostra logica musicale non tratteranno, ovviamente, alcuna nozione di verità, come lo stesso Seeger ha evidenziato:

“Una logica musicale appare essere una logica *pura*. E sembra una complicazione non necessaria del nostro vocabolario la designazione, in tale logica, dei concetti di verità e/o falsità”.

Per la semantica dei giudizi Martin-Löf introduce la nozione di **evidenza.** Un giudizio è evidente, se siamo d'accordo a dargli il nostro consenso. Per inciso, l'evidenza di un giudizio è attiva e del tutto personale.
A supporto della nozione di giudizio, ci deve essere una certa quantità di sintassi. Nel caso del Calcolo dei Predicati, questa è la sintassi delle proposizioni logiche. Nel caso invece della logica musicale, essa dovrebbe includere una qualche forma di notazione musicale, la quale è una forma di sintassi intesa a descrivere, almeno parzialmente, dei passaggi reali di musica.
Inoltre, esiste la nozione di **prova.** Una prova è semplicemente "ciò che rende evidente un giudizio" ed è perciò "non un oggetto ma un *atto*". Ciò che possiamo accettare come "prova valida" dipende dalla nostra comprensione semantica dei giudizi. Per esempio, nel caso del Calcolo dei Predicati, ammettiamo certe regole che ci dicono che se siamo pronti ad ammettere certi giudizi come evidenti, allora siamo anche pronti ad accettarne altri. Martin-Löf, in una estesa discussione, mostra come la forma delle regole dipenda dalla comprensione semantica dei connettivi proposizionali. Si può essere d'accordo o meno con il concetto di conoscenza alla base del Calcolo dei Predicati, ma ciò che è importante è il *metodo* con il quale esso è costruito.
Più è universale la teoria semantica, più è generale la logica. Nelle tabelle T.3.2 e T.3.3 riassumiamo la ricostruzione di Martin-Löf del Calcolo dei Predicati:

Tab. T.3.2: Componenti sintattiche del Calcolo dei Predicati

Concetto	***Esempio***
NOZIONE DI PROPOSIZIONE	<A>
NOZIONE DI GIUDIZIO	<A> è vero
NOZIONE DI DEDUZIONE (PROVA)	|-(<A> è vero)

Tab. T.3.3: Teoria semantica del Calcolo dei Predicati

Concetto	*Esempio*
VERITA' DI UNA PROPOSIZIONE	Conoscenza diretta o del metodo di prova di una proposizione
EVIDENZA DI UN GIUDIZIO	Atto di conoscere un oggetto della conoscenza
VALIDITA' DELLA PROVA	Nozione metafisica di verità o realtà applicata all'evidenza o al giudizio

3.3.3 Alcuni criteri generali per una logica musicale.

Volendo seguire le linee descritte nella sezione precedente, dovremmo cominciare con una definizione del pensiero musicale. Dalla forma di tale definizione, che può ben variare in base a quale pensiero musicale si voglia modellare (quello dei compositori, degli esecutori o degli ascoltatori), dipenderà la forma della nostra logica.

Non esiste, una descrizione della musica universalmente accettata. Tuttavia tenteremo di dare una descrizione il più possibile astratta.
Il miglior modo per verificare tale descrizione è usarla per la creazione di logiche musicali e poi come semantica per sistemi informatici, il cui risultato può essere sottomesso al giudizio dei musicisti. La descrizione che daremo sarà orientata verso l'attività del compositore e dell'esecutore trascurando quella dell'ascoltatore ed intenderà la musica come una forma artistica. Per questo, dovremo introdurre due concetti semantici: **"evidenza di una associazione"** e **"bontà di una prova".** A prescindere dalla validità di tali concetti, il punto importante da comprendere è che le logiche musicali si distinguono perché le loro sottostanti teorie semantiche determinano cosa qualifica un segnale come *segnale musicale*, e ciò risulta indipendente dai concetti sopra esposti.

Definiremo **progressione** (o passaggio musicale) un oggetto della conoscenza, nel senso che lo abbiamo comunicato o percepito o intendiamo comunicarlo. Si potrebbe semplicemente aver solo pensato tale progressione: in tal caso diremo che tale oggetto è stato percepito da noi o comunicato da noi stessi a noi stessi. Diremo che anche le **associazioni** in

un passaggio musicale o tra passaggi musicali sono parte della nostra conoscenza allo stesso livello di un oggetto della conoscenza musicale. Le **qualità** delle associazioni sono gli attributi del segnale musicale che ci fanno comprendere il fatto che stiamo percependo o comunicando musica. Con **evidenza di una associazione**, intendiamo semplicemente l'atto di comunicare o riconoscere associazioni dentro o tra passaggi musicali mediante le qualità. E' proprio tale evidenza di una associazione a rivestire il ruolo di *oggetto della conoscenza musicale.* Poiché consideriamo la musica come un'arte, è necessario descrivere anche i suoi principi estetici guida, ovvero ciò che ci permette di comunicare o accettare un oggetto della conoscenza musicale.
Non c'è una precisa parola per questo concetto. Sembra corrispondere alla misura del grado di confidenza che abbiamo nell'accettare una ragione per la cognizione di una associazione, ovvero sembra essere la nozione di validità di una prova. Useremo la parola “bontà” e con essa definiremo il secondo concetto della nostra teoria semantica. Diremo che la **bontà di una prova**, è la nozione di bontà per la musica applicata all'evidenza e all'associazione.
Detto in modo esteso: possediamo *principi estetici guida applicati all'atto della comunicazione o del riconoscimento delle associazioni dentro o tra passaggi musicali, mediante gli attributi del segnale musicale che ci fanno comprendere il fatto che stiamo comunicando o percependo musica.* In altri termini, il concetto di bontà che identifica un segnale come segnale musicale è l'unico posseduto dai partecipanti alla comunicazione o alla percezione, come individui o come consenso.

Riassumendo, tra le nozioni sintattiche essenziali nei criteri minimi per una logica musicale, avremo allora la nozione di associazione e quella di deduzione (tab. T.3.4). I corrispondenti concetti semantici saranno quelli di evidenza della associazione e di bontà della prova (tab. T.3.5).

Tab. T.3.4: Componenti sintattiche per una logica musicale

Concetto	***Esempio***
NOZIONE DI ASSOCIAZIONE	<progressione> [] <qualità>
NOZIONE DI DEDUZIONE	|-<progressione> [] <qualità>

Tab. T.3.5: Teoria semantica per una logica musicale

Concetto	*Esempio*
EVIDENZA DI UNA ASSOCIAZIONE	Atto della comunicazione o del riconoscimento delle associazioni dentro o tra passaggi musicali, mediante gli attributi del segnale musicale
BONTA' DELLA PROVA	Principi estetici guida applicati all'evidenza e alla associazione

L'istanza di una nozione sintattica di associazione richiede una grammatica formalmente esprimibile che descrive la forma sintattica della associazione. Si noti che la comune pratica di notazione musicale non può essere espressa come una grammatica formale e che, per questo, non possiamo sperare di usarla come metodo per il calcolo. Una forma sintattica possibile per le associazioni è data da

<progressioni> [] <qualità>

che va appunto letto come: "queste progressioni sono associate da queste qualità".

L'istanza di una nozione sintattica di deduzione invece, richiede una collezione di regole derivate dalla nostra comprensione semantica. Nella prossima sezione ne illustreremo il processo di costruzione mediante un esempio.

3.3.4 Un esempio di logica musicale.

Descriveremo ora un esempio di logica musicale basata sulle idee descritte. Nella fig. F.3.1 è rappresentata una grammatica che fornisce la nozione di associazione per la logica musicale, la quale può descrivere soltanto progressioni di due note di una scala pentatonica, senza riferimento alla posizione d'ottava o ad alcun altro attributo musicale. Tali progressioni possono essere associate mediante la qualità di una singola estensione di frequenza ("estensione" è il termine di Seeger per "intervallo generalizzato”). In aggiunta alla forma sopra descritta <progressioni> [] <qualità> avremo anche la forma <progressioni> [] che va letta come: “queste progressioni sono associate da qualità non specificate”.

Fig. F.3.1: Esempio di sintassi minima per una logica musicale

```
<form-of-an-association> :: =
   <progressions> "□"
   | <progressions> "□" <quality>

<quality> :: = "extent" <note-extent-symbol>

<progressions> :: =
   <progression>
   | <progression> "•" <progressions>

<progression> :: = <note-symbol>","<note-symbol>

<note-symbol> :: = "C" | "D" | "E" | "F#" | "G#"

<note-extent-symbol> :: = "M2" | "M2+" <note-extent-symbol>
```

Per definire le nozioni di progressione e qualità, abbiamo due insiemi di simboli: <nota-simbolo> e <nota-estensione-simbolo> rispettivamente.
Diremo che i simboli che definiscono la nozione di progressione sono *tipi simbolici* della grammatica, mentre quelli che definiscono la nozione di qualità sono *tipi di astrazione*. Con *tipi semantici*, intendiamo le collezioni che risultano dalla nostra volontà di dividere un segnale musicale negli aspetti che i nostri tipi simbolici e di astrazione possono denotare. Quindi, i tipi semantici della grammatica nella fig. F.3.1 sono le classi di frequenze di una scala pentatonica e le loro qualità intervallari. Il tipo simbolico <nota-simbolo> attribuisce i simboli “C”, “D”, “E”, “F#” e “G#” (nomi delle note nella notazione inglese) ai tipi semantici delle classi di frequenze nella scala pentatonica. Il tipo di astrazione <nota-estensione-simbolo> attribuisce i simboli “M2”, “M2 + M2”, “M2 è M2 + M2”, ... ai tipi semantici dell'estensione della varianza sulle classi di frequenze nella scala pentatonica.
Certe forme di associazione sono valide semplicemente grazie alle semantiche di progressioni ed estensioni. Per esempio, nella fig. F.3.2 troviamo “l'assioma di estensione” |-C, D [] estensione M2.

x, y, and z range over <note-symbol>
i and i' range over <note-extent-symbol>
P and P' range over <progressions>
p ranges over <progression>

axioms of extent

$\vdash$ C,D □ *extent* M2

$\vdash$ D,E □ *extent* M2

$\vdash$ E,F# □ *extent* M2

$\vdash$ F#,G# □ *extent* M2

$\vdash$ G#,C □ *extent* M2

associativity of quality of extent:

$$\frac{x,y \ \square\ \textit{extent}\ i \qquad y,z \ \square\ \textit{extent}\ i',\ x \neq z}{x,z \ \square\ \textit{extent}\ i + i'}$$

identity by quality of extent:

$$\frac{P \ \square\ \textit{extent}\ i \qquad P' \ \square\ \textit{extent}\ i}{P \bullet P' \ \square\ \textit{extent}\ i}$$

instance of quality of extent:

$$\frac{P \bullet p \bullet P' \ \square\ \textit{extent}\ i}{p \ \square\ \textit{extent}\ i}$$

normal form of quality of extent:

$$\frac{P \ \square\ \textit{extent}\ M2{+}M2{+}M2{+}M2\ i}{P \ \square\ \textit{extent}\ i}$$

Fig. F.3.2: Esempi di regole di deduzione

Più in generale, abbiamo |-x, y [] estensione i dove ζ (x, y) = i dove ζ è una funzione che associa un simbolo di intervallo due simboli di nota.
Altre forme si possono dedurre dalle definizioni. Per esempio, parte della nostra comprensione dell'operatore "+" è che, in generale, l'evidenza per l'associazione

x, y [] estensione i + i'

dovrebbe comprendere un terzo simbolo nota "y" tale che le associazioni

x, y [] estensione i
y, z [] estensione i'

sono ugualmente evidenti (ammesso che $x \neq y$). Ciò ci fornisce la prova per "l'associatività della qualità dell'estensione" di fig. F.3.2. Allo stesso modo, l'operatore "•" è usato per esprimere un'associazione tra progressioni. La sola forma che tale associazione ha permessa in questa logica è quella indotta da una qualità comune dell'estensione. Così, se si ha una buona evidenza di

P [] estensione i e P' [] estensione i

ciò dà immediatamente la regola per "l'identità della qualità dell'estensione" di fig. F.3.2.

Ulteriori analisi portano alle rimanenti regole della figura. Siccome tali regole derivano dalla nostra interpretazione semantica, possiamo ritenerle consistenti. Tuttavia, non sappiamo se sono esaustive (complete). In fig. F.3.3 ci sono alcune esempi di prove valide nella logica descritta.

Riassumendo, le nozioni primitive di note della scala pentatonica e di estensione sono state usate per comporre un piccolo sistema formale. Le regole assicurano una buona evidenza per ogni associazione formalmente derivabile nel sistema.

Si noterà come le regole di fig. F.3.2 non seguono il tradizionale schema di introduzione/eliminazione dei connettivi. Mancano infatti le regole di eliminazione. Le regole di introduzione definiscono il significato dei connettivi e recenti lavori suggeriscono che le regole di eliminazione siano determinate da quelle di introduzione. Tale proprietà andrebbe verificata nel sistema che abbiamo descritto.

Example 1

C,D □	(given)
D,E □	(given)
C,D □ *extent* M2	(axiom of extent, instance of quality of extent)
D,E □ *extent* M2	(axiom of extent, instance of quality of extent)
C,D ● D,E □ *extent* M2	(identity of quality of extent)

Example 2

E,G# □	(given)
E,F# □ *extent* M2	(axiom of extent, instance of quality of extent)
F#,G# □ *extent* M2	(axiom of extent, instance of quality of extent)
E,G# □ *extent* M2+M2	(associativity of quality of extent)

Example 3

E,G# □ *extent* $\zeta_{\langle \text{note-symbol} \rangle}$ (E,G#)	(given)
E,G# □ *extent* M2+M2	(theory of equality)

Example 4

E,$\xi_{\langle \text{note-symbol} \rangle}$ (E,M2+M2+M2) □ *extent* M2+M2+M2	(given)
E,C □ *extent* M2+M2+M2	(theory of equality)

Fig. F.3.3: Esempi di forme sintattiche di deduzione

3.3.5 Suono, simbolo e modo.

Descriveremo ora le idee di Seeger nei termini dei criteri esposti per una logica musicale. Non forniremo le precise nozioni sintattiche di associazione e deduzione, ma piuttosto suggeriremo come la logica musicale di Seeger potrebbe essere costruita.

Il nostro concetto semantico di evidenza dell'associazione è strettamente connesso alla concezione di Seeger di conoscenza musicale. Il nostro concetto di bontà di una prova richiederà una definizione leggermente diversa per essere compatibile con la visione di Seeger. Nella trasposizione

nel nostro contesto, alcune idee di Seeger sono destinate a cadere o ad essere semplificate. Per Seeger, i tipi semantici (o risorse, con la sua terminologia) per le progressioni sono sei differenti attributi del suono, ovvero frequenza, dinamiche, tempo, proporzioni (durate relative), densità tonale e densità ritmica. Di questi, i primi quattro sono "semplici" mentre gli ultimi due sono "composti" (ovvero formati dalla composizione di attributi semplici). La densità tonale si riferisce all'attributo del timbro ed include anche (come gradazione) la polifonia; la densità ritmica invece si riferisce agli effetti di progressioni temporalmente coincidenti sulla percezione dell'impulso e del metro. I tipi semantici essenziali per le qualità delle associazioni tra e dentro le progressioni sono *compensazione, seriazione, estensione e incatenamento*. Compensazione e seriazione sono stati già definiti ma verranno spiegati ora più a fondo.
Compensazione è la qualità della varianza e dell'invarianza del segnale musicale su tre aspetti dell'astrazione progressivamente sempre più generali: estensione dentro e tra progressioni; direzione dell'estensione come movimenti di intensità, tonicità e "densità"; varianza in relazione a direzioni complementari all'estensione.
Seriazione è la maniera in cui le qualità suddividono le progressioni a diversi livelli di comunicazione o percezione. Seeger definisce tre livelli che chiama minimale, medio e massimale. Infine, **incatenamento** è la maniera in cui le progressioni (e le loro qualità associate) sono combinate temporalmente. Di tutte queste qualità, la compensazione è la più importante per ciò che riguarda la componente emotiva del segnale musicale, mentre le altre possono essere intese come "organizzazioni intellettuali" della compensazione. Seeger usa la parola *modo* (*mood*) in connessione con tutte queste qualità, nella nostra trattazione il suo uso è riservato per il concetto semantico di prova. Dobbiamo ora riformulare il concetto di Seeger di evidenza di un'associazione come l'atto della comunicazione o del riconoscimento delle associazioni dentro o tra passaggi musicali, mediante gli attributi del segnale musicale *che sono primariamente compensazione, seriazione, estensione e incatenamento.* Per Seeger i concetti essenziali che giustificano un segnale come segnale musicale sono la varianza e l'invarianza dell'affetto che differiscono dai segnali parlati:

"La differenza tra una persona che usa il modo logico del parlato ed una che usa il modo logico della musica è che la prima mantiene una tonicità invariante del modo dell'affetto, mentre la seconda è libera di sentire una corrispondenza biunivoca non solo con la varianza

– invarianza intellettuale ma anche affettiva del messaggio musicale che sta producendo o ricevendo”.

Useremo allora **modo di una prova** per indicare il concetto semantico secondo cui le qualità e le progressioni di una associazione cooperano insieme per permettere la comunicazione o la ricezione di un segnale musicale, diverso da un segnale parlato o di altro tipo (tab. T.3.6):

Tab. T.3.6: Teoria semantica per la logica musicale di Seeger

Concetto	***Spiegazione***
EVIDENZA DI UNA ASSOCIAZIONE	Atto della comunicazione o del riconoscimento delle associazioni dentro o tra passaggi musicali, mediante gli attributi del segnale musicale che sono primariamente compensazione, seriazione, estensione e incatenamento
MODO DI UNA PROVA	Movimento e stasi “emotiva” e “intellettuale” che giustificano un segnale come segnale musicale, applicati all'evidenza e all'associazione

Da un punto di vista computazionale, lo sviluppo sintattico di Seeger per la sua logica musicale manca di una corrispondenza nella semantica. Egli usa la notazione comune alterata in modo da permettere la specificazione, ad esempio, di proporzioni senza frequenza. In particolare, sembra caratteristico della trattazione sintattico di Seeger il fatto che i livelli di estensione siano fissati per una particolare progressione. Una data progressione potrebbe avere molti esempi di questo tipo di associazione e ciò può essere rappresentato interamente mediante un trattamento sintattico più formale. Inoltre, Seeger introduce i termini di *mesomorfo* e *olomorfo* per indicare che le progressioni sono costruite di due o tre tipi semantici rispettivamente. Ciò sembra essere una restrizione non necessaria che nasce dal suo trattamento sintattico informale.

Per la nozione di <u>associazione</u> nella logica musicale di Seeger e per i particolari di definizione, si fornisce la grammatica esposta nelle figure da F.3.5a a F.3.5c. Tale grammatica è una sorta di "schizzo" piuttosto che un resoconto completo. Si noti che nella figura F.3.5a la nozione di associazione che abbiamo sviluppata nella fig. F.3.1 è ancora valida in questo contesto.

Fig. F.3.5a: Nozione di associazione: sintassi dell'associazione

```
<association> :: =
  <progressions> "□"
  | <progressions> "□" <qualities>
```

La figura F.3.5c espone le forme di progressione mentre la figura F.3.5b quelle di qualità. Nella figura F.3.6, si trovano la nozione di deduzione per compensazione di direzione e varianza ed altre nozioni di deduzione in modo informale.

Fig. F.3.5b: Nozione di associazione: sintassi delle qualità

```
<qualities> :: =
  resource <type-name> extent <progression-of-extent>
  | resource <type-name> centricity <progression-of-centricity>
  | resource <type-name> variance <progression-of-variance>
  | resource <type-name> seriation <seriation>
  | resource <type-name> extension <extension>
  | enchainment <enchainment>
  | <qualities> "•" <qualities>

<type-name> :: = "pitch" | "tempo" | "proportion" | "dynamics" ...
<centricity> :: = "+" | "=" | "-"
<variance> :: = "δ" | "o"
<extension> :: = "minimal" | "medial" | "maximal"
<seriation> :: = "modulatesthrough" | "retrogrades" ...

<extent> :: =
  <pitch-extent> | <tempo-extent>
  | <proportion-extent> | <dynamics-extent>
  | ...

<enchainment> :: =
  "elision" <integer-symbol>
  | "delayed succession" <integer-symbol>

<pitch-extent> :: =
  <pitch-extent-name><integer-symbol><pitch-extent-direction>
  | "unison"

<pitch-extent-name> :: = "m" | "M" | "P" | "aug" | "dim"
<pitch-extent-direction> :: = "↑" | "↓"
<tempo-extent> :: = "t" <integer-symbol><integer-symbol>
<proportion-extent> :: = "p" <integer-symbol>
<dynamics-extent> :: = "d" <integer-symbol>
<integer-symbol> :: = "0" | "1" | "2" ...
```

```
<progressions> :: =
    <progression>
    | <progression> "•" <progressions>

<progression> :: =
    <protomorph>
    | <protomorph> ","<progression>

<protomorph> :: =
| <pitch><proportion><dynamic><tempo>
  | <pitch><proportion><dynamic>
  | <pitch><proportion>
  <pitch>
  | <proportion><dynamic><tempo>
  | ...

<pitch> :: =
    <note><enharmonic><octav>
    | <note><octave>
    | <note><enharmonic>
    | <note>

<note> :: = "C"| "D"| "E"| "F"| "G"| "A"| "B"
<enharmonic> :: = "nat"| ""| "bb"| "b"|"#"| "x"
<octave> :: = "o1"| "o2"| "o3"| "o4"| "o5"|"o6"| "o7"| "o8"| "o9"

<tempo> :: = "largo"|"andante"| "moderato"| "allergo"| "presto"
<rubato> :: = "S"| "s"| "mm"| "M"| "pm"| "f"| "F"
<dynamics> :: = "P"| "mp"| "m"| "mf"| "f"

<proportion> :: =
    <integer-symbol> "/" <integer-symbol> <dotlist>
    | <integer-symbol> <dotlist>
    | <integer-symbol>

<dotlist> :: = "."| <dotlist> "."
```

Fig. F.3.5c: Nozione di associazione: sintassi delle progressioni

Q and Q' range over <progressions>
r ranges over <type-name>

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} ++ \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} --}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta\delta}$$

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} +- \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} -+}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta o}$$

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} +++ \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} ---}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta\delta\delta}$$

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} ++- \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} --+}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta\delta o}$$

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} +-- \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} -++}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta oo}$$

$$\frac{Q \, \square \, \textit{resource r centricity} +-+ \qquad Q' \, \square \, \textit{resource r centricity} -+-}{Q \bullet Q' \, \square \, \textit{resource r variance } \delta o\delta}$$

Fig. F.3.6: Nozione di deduzione per centricità e varianza

3.3.6 Identità e unificazione.

Fino ad ora abbiamo parlato dei concetti di compensazione e seriazione. Abbiamo affermato che tali concetti possono essere rappresentati dalle nozioni sintattiche di associazione ed abbiamo dato un significato nei termini di una teoria semantica alle evidenze dell'associazione. Dobbiamo tuttavia ancora parlare del concetto di **identità** che, nella nostra terminologia, è la conoscenza del fatto che le progressioni sono associate dallo stesso effetto cognitivo o comunicativo. Questo concetto è rappresentato nella logica musicale di Seeger come la associazione tra progressioni attraverso le qualità comuni di centricità. E' inoltre rappresentato mediante la ripetizione della seriazione come qualità.

Ciò che può confondere è che esiste, nella logica musicale, un'altra nozione di identità ovvero quella sintattica di **unificazione** che è in realtà parte del contesto computazionale della nostra nozione di deduzione. Tale nozione ha anche un'interpretazione semantica. L'unificazione è la classe fondamentale di algoritmi che ci permettono di attuare la connessione richiesta nell'applicazione delle regole della nozione di deduzione. L'unificazione inoltre, computa l'identità delle forme sintattiche e ci permette (in presenza di una teoria dell'uguaglianza) di tradurre tali forme in forme sintattiche canoniche. Dunque l'unificazione, in una logica musicale, è il meccanismo computazionale che implementa il concetto sintattico di bontà (o modo, per dirla con Seeger) per la nozione di deduzione; ma, in senso semantico-teorico, le associazioni per le quali fornisce l'evidenza sono associazioni dentro o tra le progressioni che includono anche l'identità tra i loro attributi.
In presenza di una teoria dell'uguaglianza, l'unificazione è detta a volte anche **unificazione semantica**. Abbiamo precedentemente affermato che le teorie dell'uguaglianza non possono fornire teorie semantiche per le logiche musicali nel senso dei criteri di Martin-Löf per le semantiche. Tuttavia tali teorie (dell'uguaglianza) possono essere molto espressive e, insieme all'unificazione, possono darci un meccanismo per mutuare l'evidenza delle associazioni da altre logiche, estendendo la nostra nozione sintattica di deduzione in modo da renderla "quasi-semantica".

3.3.7 Un breve riassunto.

Se ciò che è essenziale ad una logica è il concetto di conoscenza che la sottende, le nozioni sintattiche seguono da una descrizione filosofica o fenomenologica della conoscenza, che chiamiamo teoria semantica. Le logiche musicali si distinguono dalle altre logiche in quanto le loro teorie semantiche devono riuscire ad identificare cosa qualifica un segnale come segnale musicale per coloro che partecipano alla comunicazione ed alla cognizione. Nei nostri criteri minimi per una logica musicale, che i principi estetici guida o "bontà" sono la misura essenziale per la qualificazione. Nella logica musicale di Seeger invece è il "modo", inteso come movimento–stasi intellettuale o emotiva, a configurarsi come misura essenziale.

Un metodo per la costruzione di logiche musicali coinvolge processi che vanno dalla definizione di una teoria semantico–filosofica fino alla definizione delle nozioni sintattiche (includendo le teorie dell'uguaglianza), ai sistemi informatici, al consenso del il comportamento "musicale" di tali sistemi, alla giustificazione ed al raffinamento della teoria semantica. Le teorie dell'uguaglianza che esistono in letteratura sulla teoria musicale possono essere integrate in una logica musicale mediante la computazione dell'unificazione.

3.4 L'approccio algebrico.

3.4.1 Specie dodecafoniche e modulazioni.

In questo paragrafo, si mostrerà come sia possibile trattare in modo algebrico le specie dodecafoniche e le modulazioni[20]. Verrà inoltre esplicitato il valore scientifico di tale tipo di trattazione grazie alla scoperta di un nuovo tipo di principio di variazione musicale. Verranno esaminate solo scale dodecafoniche convenzionali, ma la loro generalizzazione a scale n-foniche o a scale di rumore non è difficile.

20) Cfr. Cap. 2 per maggiori chiarimenti.

La importante regola del "circolo delle quinte" della musica convenzionale e neo-tonale è nota; Schoenberg fu uno dei primi compositori a suggerire la sostituzione di tale regola con "*serie paritetiche di dodici suoni*", in modo da eliminare la tonalità e conquistare una unità formale dello spazio musicale tra tutti gli aspetti di una composizione (armonia, contrappunto, melodia). Secondo Schoenberg la base *seriale* di ogni composizione dovrebbe comprendere 48 forme della serie fondamentale, ovvero le dodici trasposizioni cromatiche nel loro modo originale ed in quello retrogrado; tali forme sarebbero estremamente connesse le une con le altre.
Agli inizi del 1925, Joseph M. Hauer portò un grande contributo alla definizione di un sistema di composizione dodecafonico vero e proprio senza però ricevere adeguata attenzione forse a causa di alcuni difetti congeniti dei suoi scritti: uso di una notazione poco conosciuta, mirata ad eliminare diesis e bemolle, mancanza di chiarezza nell'esposizione, errori logici e di calcolo. Inoltre Hauer presentava un concetto nuovo e piuttosto difficile da comprendere, ovvero quello di **specie** dodecafonica vera e propria, il cui comportamento tendeva ad imitare quello delle tonalità tradizionali. Per tutto questo, il lavoro di Hauer non è mai stato considerato nella giusta ottica (ovvero non ha mai reso obsoleta la teoria di Schoenberg). Ma se le specie dodecafoniche esistono davvero, allora la serie non è più il fondamento della composizione musicale; il concetto di tonalità non viene semplicemente eliminato, ma solo rimpiazzato dal concetto più generale di specie; in definitiva, l'analisi di Schoenberg risulta falsa poiché le serie non sono solo collegate le une con le altre ma anche con un sostrato di "specie". Il resto del paragrafo servirà, oltre che a descrivere la teoria delle specie dodecafoniche, a mostrare un'altra importante conseguenza di tale teoria: il concetto di **modulazione dodecafonica**.

3.4.2 Generazione delle specie.

Convenzionalmente, modulare significa lasciare una tonalità per entrare in un'altra ma, data l' interna congruità delle tonalità convenzionali, modulazioni e trasposizioni hanno molti aspetti in comune. Tutto ciò non è vero nel caso di specie dodecafoniche, ognuna delle quali possiede una propria <u>struttura interna</u>; trasporre cromaticamente significa modificare le proprietà interne della specie. Ancora più importante: le modulazioni dodecafoniche prevedono la ricerca di una trasformazione sintattica.
Per prima cosa, definiremo le specie dodecafoniche usando l'algebra delle quantità discrete.

(i) Come insieme di partenza, si consideri la scala cromatica divisa in due metà di sei note ciascuna.
(ii) Le varie combinazioni complementari dell'insieme sopra descritto sono nel numero di $\binom{10}{5} = 252$.

Usando sulla serie il taglio 6 + 6 e nessun altro taglio (es. 7 + 5, 8 + 4, ecc.) è possibile lavorare con il maggior numero di combinazioni.

La seguente matrice mostra le prime sette e l'ultima delle 252 combinazioni del suddetto taglio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	7	6	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	8	6	7	9	10	11	12
1	2	3	4	5	9	6	7	8	10	11	12
1	2	3	4	5	10	6	7	8	9	11	12
1	2	3	4	5	11	6	7	8	9	10	12
1	2	3	4	6	7	5	8	9	10	11	12
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	12

E' possibile operare qualsiasi tipo di permutazione sulle due metà della serie di partenza. Come esempio del modo di procedere, le dodici trasposizioni cromatiche della combinazione n. 6 sono riportate nella seguente matrice:

1	2	3	4	5	11	6	7	8	9	10	12
2	3	4	5	6	12	7	8	9	10	11	1
3	4	5	6	7	1	8	9	10	11	12	2
4	5	6	7	8	2	9	10	11	12	1	3
5	6	7	8	9	3	10	11	12	1	2	4
6	7	8	9	10	4	11	12	1	2	3	5
7	8	9	10	11	5	12	1	2	3	4	6
8	9	10	11	12	6	1	2	3	4	5	7
9	10	11	12	1	7	2	3	4	5	6	8
10	11	12	1	2	8	3	4	5	6	7	9
11	12	1	2	3	9	4	5	6	7	8	10
12	1	2	3	4	10	5	6	7	8	9	11

Si noti che le trasposizioni 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 e 12 contengono sia l'1 che il 12 nella stessa metà e di conseguenza sono superflue, essendo riducibili,

mediante permutazione circolare, a combinazioni con i numeri su metà separate.
Mediante tali forme di semplificazione è possibile portare le 252 forme originarie a 44 forme, che costituiscono appunto le serie dodecafoniche. Le prime 10 e l'ultima sono mostrate nella seguente matrice:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	7	6	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	8	6	7	9	10	11	12
1	2	3	4	5	9	6	7	8	10	11	12
1	2	3	4	5	10	6	7	8	9	11	12
1	2	3	4	6	8	5	7	9	10	11	12
1	2	3	4	6	9	5	7	8	10	11	12
1	2	3	4	6	10	5	7	8	9	11	12
1	2	3	4	6	11	5	7	8	9	10	12
1	2	3	4	7	8	5	6	9	10	11	12
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	12

Il confronto della tavola algebrica delle specie dodecafoniche con quelle di Hauer mostra come esse siano in connessione diretta una con l'altra.
In pratica ogni *specie* è rappresentata dalla permutazione della matrice che deriva, mediante moltiplicazione di matrici, dalla matrice cromatica

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{Vmatrix} .$$

Per esempio, la matrice *identità* rappresenta la **prima** specie:

$$\begin{Vmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{Vmatrix} = I$$

dove le x rappresentano zeri, poiché abbiamo AI = A.
La formula di moltiplicazione di matrici è

$$\sum_{j=1}^{j=12} a_{ij} b_{jk} = C_{ik} \, .$$

Applicando tale formula, si forma la matrice della **seconda** specie

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{array} \right\| = S_2$$

poiché

$$AS_2 = \| 1\,2\,3\,4\,5\,7\,6\,8\,9\,10\,11\,12 \| \, .$$

Mediante tali operazioni, ogni riga della matrice dei dodici suoni è soggetta a 44 modulazioni cromatiche per un totale di 12! (fattoriale) permutazioni. Mostrare come l'armonia dodecafonica ed il contrappunto dodecafonico discendano dalla *teoria delle specie* è un obiettivo che esula dal presente lavoro. Basti ricordare che ogni matrice possiede i propri “accordi caratteristici” e che questi possono essere connessi con altri accordi provenienti da altre matrici, creando tessiture armoniche e contrappuntistiche.

3.4.3 Gradi di libertà.

Ogni matrice a dodici suoni può essere classificata secondo due proprietà:

(i) numero degli elementi cromatici **(esclusione degli elementi);**
(ii) numero degli intervalli esistenti tra due elementi qualsiasi della scala cromatica (**esclusione degli intervalli)**.

Tali proprietà rappresentano i due *gradi di libertà* della matrice. Una funzione molto importante è assunta dalla matrice **esclusione**: ovvero la matrice che contiene *tutti i semitoni della scala cromatica e tutti gli intervalli possibili tra detti semitoni.* Un esempio di tale matrice è il seguente:

$$\| 12\ 11\ 1\ 2\ 10\ 3\ 9\ 4\ 8\ 5\ 7\ 6 \|$$

Un altro famoso esempio è quello usato da Alban Berg in alcune parti della Suite Lirica (ovviamente Berg non intendeva la serie come una matrice):

$$\| 1\ 6\ 8\ 11\ 3\ 4\ 10\ 9\ 5\ 2\ 12\ 7 \|$$

Tutte le specie dodecafoniche conservano l'esclusione degli elementi (ovvero la presenza di tutti i semitoni della scala cromatica) ma in molti casi presentano una “degenerazione” degli intervalli (ovvero una perdita in completezza). Ad esempio, la moltiplicazione di un matrice esclusione per la 44° specie:

$$\| 12\ 11\ 1\ 2\ 10\ 3\ 9\ 4\ 8\ 5\ 7\ 6 \| \times \begin{Vmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{Vmatrix}$$

porta a $\| 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \|$ che è una matrice degenere. Come conseguenza, una moltiplicazione tra matrici che porti ad una matrice **esclusione** o, più in generale, una matrice con grado **grado proprio di degenerazione,** va cercata con molta attenzione all'interno dello spettro delle permutazioni possibili. Ciò significa che la modulazione dodecafonica *non può essere applicata indiscriminatamente* a due matrici dodecafoniche qualsiasi.

Esistono dunque 44 specie dodecafoniche, ognuna con $(P_6)^2$ matrici, derivanti da permutazioni, rappresentative. Ognuna di tali matrici porta ad una modulazione dodecafonica solo mediante *opportune* moltiplicazioni con altre matrici. Quando la matrice che risulta da una permutazione non è degenere viene detta matrice **eigen-modulata** mentre una matrice che conserva il grado di degenerazione di partenza è detta matrice **eigen-modulata della specie.**

3.4.4 Proprietà delle matrici.

Si mostreranno ora alcune proprietà di matrici generiche e delle eigen-matrici.

1. Due matrici, una che modula la scala cromatica in una matrice esclusione sulla prima specie dodecafonica e l'altra che produce lo stesso risultato usando il circolo delle quinte sulla 40° specie, sono identiche. Tale uguaglianza è un esempio di **isomorfismo locale strutturale.**

Così:

$$\left\| 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12 \right\| \times \left\| \begin{matrix} . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{matrix} \right\|$$

produce $\left\| 4\,3\,5\,2\,6\,1\,7\,12\,8\,11\,9\,10 \right\|$ mentre:

$$\|161149271251038\| \times \begin{Vmatrix} . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{Vmatrix}$$

produce $\|4\,11\,9\,6\,2\,1\,7\,8\,12\,3\,5\,10\|$.

2. La matrice M_1 che modula la scala cromatica R nel circolo delle quinte S, modula reciprocamente il circolo delle quinte S nella scala cromatica R. Di conseguenza M_1 è il proprio **inverso**. Ovvero:

$$RM_1 = S$$
$$SM_1 = R$$
$$M_1 = M_1^{-1}$$

In forma di matrice, si avrà:

$$\|1234567891011\| \times \begin{Vmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{Vmatrix}$$

che produce $\|1\,6\,11\,4\,9\,2\,7\,12\,5\,10\,3\,8\|$, mentre:

$$\left\| 161149271251038 \right\| \times \begin{Vmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{Vmatrix}$$

che produce $\left\| 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12 \right\|$.

3. La eigen-matrice che modula la matrice esclusione V della prima specie, nella matrice esclusione W della 40° specie, è il proprio inverso. Ovvero:

$$VM' = W$$
$$WM' = V$$
$$M' = M'^{-1}$$

In forma di matrice, si avrà:

$$\left\| 435261712811910 \right\| \times \begin{Vmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{Vmatrix}$$

che produce $\left\| 4\,11\,9\,6\,2\,1\,7\,8\,12\,3\,5\,10 \right\|$ mentre:

$$\|411962178123510\| \times \begin{Vmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{Vmatrix}$$

produce $\|4\,3\,5\,2\,6\,1\,7\,12\,8\,11\,9\,10\|$.
Esiste inoltre una relazione composta tra la matrice M in (2) e la matrice M' in (3), che non verrà però esaminata in questa sede.

3.4.5 Le algebre P_x.

Gli operatori usati nelle modulazioni dodecafoniche sono di tipo lineare e lavorano sui gradi di libertà delle matrici; per questo sono detti *operatori dinamici* M_x. Le matrici su cui operano tali operatori, ovvero lo spettro delle permutazioni possibili dalle due metà della serie originale, sono dette *variabili dinamiche* P_x[21]. Per concludere, si mostrerà brevemente la struttura interna di tali variabili dinamiche. P_x è una funzione lineare per i suoi elementi. Ma, come si è mostrato, essa possiede due gradi interni di libertà e dunque si dovranno considerare due tipi di elementi, ovvero: termini ed intervalli tra essi. Proprio per questa dualità le teorie M_x e P_x non possono essere costruite in completa analogia con la teoria convenzionale delle matrici. La convenzionale algebra delle matrici enfatizza, tra le altre cose, il numero e l'ordine di successione dei suoi elementi ma non gli *intervalli unitari* (ovvero le differenze tra due qualsiasi elementi adiacenti).

21) L'espressione *variabile dinamica* rimpiazza, nel trattamento teoria matematica della musica, espressioni più intuitive come “serie dodecafonica”, “circolo delle quinte”, “scala cromatica”.

E' possibile sviluppare un' algebra alternativa, detta **algebra generatrice**, che enfatizza gli aspetti intervallari di P_x. Nel seguito si mostrerà un esempio di tale algebra detta **equazione generatrice delle matrici esclusione**, come specificazione di P_x.

1) Siano X_1 ed X_2 due assi cartesiani perpendicolari e sia X la loro bisettrice. Sia $pr_{x_1}(\ldots)$ la proiezione della partizione di X_1 su X lungo X_2. Allo stesso modo sia $pr_{x_2}(\ldots)$ la proiezione della partizione di X_2 su X lungo X_1. Sia $\cap$ la loro intersezione.
2) Un **generatore** è una partizione in cui le grandezze dei vari intervalli unitari di partizionamento possono essere differenti e in cui il loro ordine di successione è considerato fisso. La sua forma generale sarà: $f(x_i)=\sum_j a_j x_{ij}$ dove x_{ij} è il j-esimo intervallo su X_i e a_j sono dei coefficienti numerici.
3) La partizione di X_1 è $\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,r}+\frac{1}{2}x_{1,r+1}$.
4) La partizione di X_2 è $\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{2,r}$.
5) L'intervallo unitario è $x_{1,r+1}$ e $x_{2,r}=x_{1,r+1}+1$.
6) Con la proiezione su X si ottiene
$$P_x \equiv pr_{x_1}\left(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,r}+\frac{1}{2}x_{1,r+1}\right)\cap pr_{x_2}\left(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{2,r}\right).$$
7) q_p è un intervallo e $q_1<q_2<\ldots<q_{12}$ dove $q_1=pr_{x_2}(x_{2,1})-pr_{x_1}(x_{1,1}),\ldots,q_{12}=pr_{x_1}(x_{1,1})$.

La risultante matrice esclusione dodecafonica sarà allora:

$$P_x \equiv \|12\ 1\ 11\ 2\ 10\ 3\ 9\ 4\ 8\ 5\ 7\ 6\|.$$

Ogni modulazione ed ogni permutazione di P_x *viene attuata sostituendo nuovi generatori ad uno o ad entrambi i generatori originali*. Seguono due esempi di tali operazioni.

Primo esempio.
Sia $P_x \equiv \|12\ 1\ 11\ 2\ 10\ 3\ 9\ 4\ 8\ 5\ 7\ 6\|$. Allora la forma

$P'_x \equiv \|6\ 7\ 5\ 8\ 4\ 9\ 3\ 10\ 2\ 11\ 1\ 12\|$ si otterrà sostituendo $\frac{1}{2}x_{1.r+1}+\sum_{r=1}^{r=1/2} x_{1,r}$ al posto di $\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,2}+\frac{1}{2}x_{1,r+1}$ nella equazione

$P_x \equiv pr_{x_1}(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,r}+\frac{1}{2}x_{1,r+1}) \cap pr_{x_2}(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{2,r})$ ed ottenendo

così: $P'_x \equiv pr_{x_1}(\frac{1}{2}x_{1,r+1}+\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,2}) \cap pr_{x_2}(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{2,r})$.

Secondo esempio.
Sia P_x come definito nel primo esempio. Allora la forma
$P''_x \equiv \|6\ 7\ 5\ 8\ 4\ 9\ 3\ 10\ 2\ 11\ 1\ 12\|$ (ovvero la matrice esclusione della 40° specie) si otterrà sostituendo $\sum_{r=1}^{r=x/4} \frac{3}{2}x_{2,r}+1_{2,r}+\frac{1}{2}x_{2,r}+1_{2,r}$ al posto di $\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{2,r}$ in P_x ed ottenendo così:

$P''_x \equiv pr_{x_1}(\sum_{r=1}^{r=x/2} x_{1,r}+\frac{1}{2}x_{1,r+1}) \cap pr_{x_2}(\sum_{r=1}^{r=x/4} \frac{3}{2}x_{2,r}+1_{2,r}+\frac{1}{2}x_{2,r}+1_{2,r})$.

Esistono altre complicate relazioni tra due generatori qualunque delle algebre P_x ma non si proseguirà oltre nella trattazione.

Nel successivo capitolo, si mostreranno alcune applicazioni delle logiche descritte, su un terreno più propriamente musicale: si vedrà come sia possibile analizzare un brano musicale utilizzando l'approccio insiemistico; si mostrerà infine la teoria di Milton Babbitt, esplicitando le sue analogie con l'approccio algebrico. Sulla base dei risultati conseguiti, si cercherà di capire se la domanda *"La logica musicale è analitica o procedurale?"* abbia senso e, in caso affermativo, se abbia una risposta accettabile.

4. Alcuni casi concreti

In questo capitolo si vedranno due casi completi di applicazione dei metodi descritti al dominio musicale. Si vedrà prima come sia possibile analizzare un testo musicale mediante l'approccio insiemistico, quindi una applicazione della teoria algebrica attraverso un esame preliminare della tecnica compositiva del compositore americano Milton Babbitt. Nel prossimo capitolo, il conclusivo, si tenterà di dare risposta, alla luce anche degli esempi fatti, alle fondamentali domande: *Esiste una struttura logica della musica? La logica musicale è analitica o procedurale?*

4.1 Analisi insiemistica.

Come esempio di una possibile applicazione dell'approccio insiemistico, si cercherà di definire un sistema astratto temporalmente quantificato in grado di rappresentare il brano “Chopin” di R. Schumann tratto dal Carnaval Op. 9 No. 12 e rappresentato in figura F.4.1.

F.4.1: “Chopin” di R. Schumann

Prima di tutto è necessario rimuovere alcune ambiguità concernenti, rispettivamente, l'appoggiatura di battuta 6 ed il segno 𝄋 nella prima e nell'ultima battuta. Nel primo caso si intenderà l'appoggiatura come nota reale, con valore pari ad 1/32, conformandosi al modo tradizionale di esecuzione di autori romantici quali appunto Schumann, Chopin o Brahms.

Nel secondo caso invece, il segno 𝄋 verrà semplicemente ignorato per semplificare la trattazione. Oltre a ciò, le prime due pause di battuta 1 verranno considerate come una sola pausa con durata uguale alla loro somma; le coppie di pausa di quarto di battuta 4 e di battuta 14 saranno interpretate come una singola pausa di semiminima; le tre pause di quarto di battuta 7 infine, si intenderanno come una singola pausa di tre quarti.

Sia T un insieme di punti-tempo isomorfo all'intervallo chiuso dei numeri razionali $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ ordinato da ≤ in modo tale che T sia un insieme infinito con inizio e fine *densamente* ordinato, se non continuo. Sia P l'insieme delle 88 frequenze della tastiera di un pianoforte ordinario così che p- = A_2 (*subcontra* A) e -p = c''''' (c con 5 apici; la notazione è mutuata da [APEL, 1950]. L'ordinamento δ è noto. Come si può dedurre dalla decima battuta nel brano vi sono tre voci; si definirà allora V = {I, II, III} dove I è la voce superiore, II l'intermedia e III l'inferiore. Come si potrà allora definire il selettore di punto S nell'esempio? 'Leggendo' la partitura tenendo in mente le clausole imposte, si otterrà:

$$S_{III}=\{t_O^{III},\ldots,t_{162}^{III}\};\, t-=t_O^{III},\, -t=t_{162}^{III}$$

$$S_{II}=\{t_O^{II},t_1^{II},t_2^{II},t_3^{II}\};\, t-=t_O^{II},-t=t_3^{II};\, t_1^{II}=t_{108}^{II},\, t_2^{II}=t_{114}^{II}$$

$$S_I=\{t_O^I,\ldots,t_{69}^I\};\, t-=t_O^I,-t=t_{69}^I;\, t_{30}^I=t_{66}^{III}<t_{67}^{III}<t_{31}^I\; e\; t_{68}^{III}=t_{38}^I$$

Con l'eccezione di t_{31}^I, ogni punto in S_I è identico a qualche punto in S_{III}; ciò è parzialmente indicato da:

$$\frac{t_O^I\, 1\, 2\, 3\, 4\, 5 \ldots 65\, 66\, 67\, 68\, 69}{t_O^{III}\, 8\, 10\, 11\, 12\, 15 \ldots 150\, 154\, 156\, 158\, 162}$$

Inoltre, $\cup_{v\in\{I,II,III\}} S_v = S_{III} \cup \{t_{31}^I\}$. Avendo definito un frame musicale con partizioni temporali indicizzate vocalmente, si darà un parziale specificazione della misura della durata in tale frame. Per le condizioni date, tale misura ammonta al valore di m:

$$m(\vec{t}_i^{III})=\frac{1}{8}\; per\; i=8,\ldots,161\; ; m(\vec{t}_{162}^{III})=0$$

$$m(\vec{t}_0^{II})=13\frac{1}{8,}\, m(\vec{t}_1^{II})=\frac{3}{4,}\, m(\vec{t}_2^{II})=6$$

$$m(\vec{t}_0^{I})=1, m(\vec{t}_1^{I})=\frac{1}{4}, m(\vec{t}_2^{I})=\frac{1}{8}, m(\vec{t}_3^{I})=\frac{1}{8}, m(\vec{t}_3^{I})=\frac{3}{8}\ldots\ldots$$
$$\ldots m(\vec{t}_{30}^{I})=\frac{7}{32}, m(\vec{t}_{31}^{I})=\frac{1}{32}, m(\vec{t}_{32}^{I})=\frac{1}{4},\ldots, m(\vec{t}_{68}^{I})=\frac{1}{2} .$$

Infine, si indicherà come definire la specificazione melodico-ritmica <On, Att> osservando che:

$$Att_{III}=\{<t_0^{III}, La-bemolle>, <t_1^{III}, mi-bemolle>, <t_2^{III}, la-bemolle>, <t_3^{III}, do'>,\ldots,$$
$$\ldots, <t_{161}^{III}, la'-bemolle>, <-t, \S>\}\subseteq On_{III}$$

$$Att_{II}=\{<t_0^{II}, \S>, <t_1^{II}, do''>, <t_2^{II}, \S>, <-t, \S>\}\subseteq On_{II}$$
$$Att_{I}=\{<t_0^{II}, \S>, <t_1^{I}, mi-bemolle''>, <t_2^{I}, \S>, <t_3^{I}, mi''-bemolle>,$$
$$<t_4^{I}, mi''-bemolle>, <t_5^{I}, fa''>,\ldots, <t_{68}^{I}, \S>\}\subseteq On_{I} .$$

Per le condizioni poste e per l'assioma MR1 (cfr. § 3.2.1), le funzioni ON_I, ON_{II}, ON_{III} rappresentano dunque il *corso musicale degli eventi* rispettivamente nelle voci I, II e III.

***

E' legittimo chiedersi se il brano di Schumann comunemente noto come “Chopin” dal Carnaval Op. 9, sia davvero *rappresentabile* con il sistema astratto sopra definito. In tal senso, almeno su due punti va posta attenzione:

1. E' plausibile pensare che il sistema appena definito sia una sorta di *limite ideale*, in quanto: (a) esso è stato definito con estremo rigore matematico

sulla base una ben nota teoria, ma (b) non esistono reali "esempi" del sistema. Per esempio, se si considera una seria qualsiasi di "performance" del brano di Schumann, ci si rende conto che queste *attualizzano* la struttura definita solo per un certo grado, decadendo da essa per varie ragioni: gli ottavi nella voce inferiore non sono tutti della stessa lunghezza, non tutte le note indicate come *simultanee* nella partitura iniziano allo stesso istante t, la lunghezza dell'appoggiatura a batt. 6 non è esattamente un trentaduesimo, ecc. Al massimo è forse possibile rintracciare, in una serie di esecuzioni, quelle che più si *avvicinano* al sistema definito che assume così ruolo di **caratteristica astratta**. Sulla base di tali considerazioni è possibile concludere che il limite ideale del brano "Chopin" di Schumann può essere identificato con il sistema musicale astratto temporalmente quantificato desunto dalla partitura; forse poi, si dovrebbe dire limite ideale *rispetto a frequenza e durata*. Va fatto notare però che questa idea di sistema musicale astratto come limite solleva diverse problematiche di filosofia della scienza non proprie solo alla musicologia e che non verranno trattate oltre in questo contesto.

2. Mentre la precedente obiezione aveva a che fare con la 'rigidità' del sistema rispetto a esecuzioni reali del brano esaminato, la presente pone l'attenzione sulla *lacunosità* del sistema che trascura alcune importanti informazioni contenute nella partitura. Per tale ragione la struttura formale definita fallisce nel distinguere differenti istanze di sistemi musicali. Ad esempio, è dato per scontato che il brano "Chopin" sia scritto per pianoforte e non, diciamo, per trio d'archi: questa assunzione in realtà, non dovrebbe far parte in qualche modo del sistema per poter distinguere una esecuzione di un trio d'archi da quella di un pianoforte? Tante altre informazioni poi, potrebbero essere incorporate nel sistema: le dinamiche, il fraseggio, ecc.

Molte sembrerebbero le lacune del sistema astratto definito. Tuttavia, le difficoltà relative ai criteri di identità e distinzione non sono insuperabili. E' possibile conservare la nozione di *sistema musicale astratto*, integrandola nel medesimo tempo in varie direzioni rendendo così giustizia ad altri importanti aspetti della musica qui non considerati.

4.2 La teoria combinatoria di Milton Babbitt.

I lavori atonali di Schoenberg, che hanno preceduto i suoi sforzi verso la formulazione del sistema con 12 note, dipendono in maniera marcata dall'uso del contrappunto. E' naturale, dunque, che quando egli cominciò a sviluppare un sistema basato su serie di 12 note il suo uso di tali serie fosse prevalentemente *motivico.* In altri termini, sebbene Schoenberg fosse cosciente delle possibilità insite negli *insiemi* di 12 note, il suo uso compositivo di tali insiemi mostra che egli preferiva pensarli come *motivi astratti*, come ordinamenti lineari di classi di note. Anche al giorno d'oggi, peraltro, tali insiemi vengono spesso utilizzati come collezioni ordinate per generare *linee* melodiche piuttosto come *insiemi non ordinati* in grado di generare non solo linee ma anche agglomerati e altri tipi di strutture.

Proprio con tale spirito, intorno al 1960 Milton Babbitt progettò una **teoria combinatoria** degli insiemi di 12 classi di note[22] basata sulla possibilità di combinare tra loro differenti insiemi (o parti di insiemi) in modo tale che il contenuto delle combinazioni rispettasse certi criteri generali. Sebbene vi siano molti modi di combinare gli insiemi di riferimento per la teoria combinatoria (insiemi di uguale cardinalità, più piccoli o più grandi, ecc.) Milton Babbitt ha rivolto la sua indagine alla ricerca di insiemi equipotenti il cui contenuto sia uguale al **totale cromatico** (ovvero a tutti e 12 i semitoni della scala cromatica). Tale tipo di collezione (un insieme di 12 classi di note senza informazioni di ordinamento) prende il nome di **aggregato** quando il contributo degli insiemi o dei segmenti di insiemi che lo compongono è *simultaneo,* mentre prende il nome di **insieme secondario** quando i suoni componenti sono uniti in successione lineare. La figura F.4.2 esemplifica tali categorie:

---

22) Con classi di note si intende l'uso dell'ottava come classe di equivalenza per tutte le note: negli insiemi di Babbitt un DO non rappresenta una singola nota con contenuto frequenziale preciso; piuttosto rappresenta 'tutti' i DO presenti nel sistema temperato.

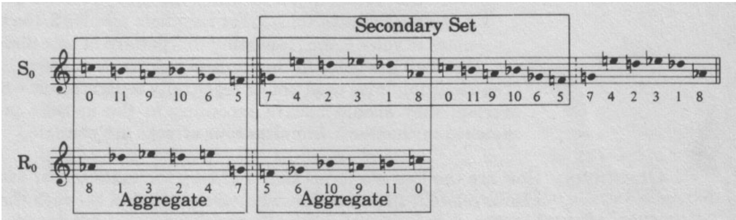


Fig. F.4.2: Aggregati e insiemi secondari.

Gli insiemi utilizzati in tale esempio sono chiamati S_0 ed R_0 ma il secondo insieme non è altro che il primo letto al rovescio. Tale forma si chiama **retrogrado** ed è molto usata in questo tipo di teorie. Le prime sei classi di note (o **esacordo**) del retrogrado sono le stesse (nel contenuto non nell'ordine) delle ultime sei di S. Dunque i primi esacordi dei due insiemi formano, se considerati simultaneamente, l'intero totale cromatico; essi sono dunque un aggregato (la stessa cosa accade anche per i secondi esacordi). Si consideri ora l'insieme S seguito da se stesso (ovvero tutta la prima linea della figura). Se si prende il secondo esacordo seguito dalla ripetizione del primo si ottiene ancora una volta un insieme di 12 classi di note. Tale insieme è detto **insieme secondario** ed è il risultato della combinazione di segmenti contenenti classi di note mutuamente esclusive.

Le combinazioni esaminate nell'esempio sono piuttosto semplici e servono a dimostrare una proprietà posseduta da tutti gli insiemi di 12 note: la **combinatorialità retrograda.** Esistono tuttavia insiemi in grado, grazie alla struttura intervallare dei segmenti costituenti, di combinarsi con altri tipi di trasformazione di se stessi (non solo con il retrogrado) e creare aggregati e insiemi secondari. Lo stesso Schoenberg ad esempio, faceva frequentemente uso di insiemi che erano in grado di formare aggregati con la propria inversione trasportata di una quinta (in figura definita come I_7 poiché la quinta è composta di sette semitoni). Un insieme in grado di combinarsi con *una* delle proprie quattro **trasformazioni basilari** (retrogradazione, inversione, forma normale e

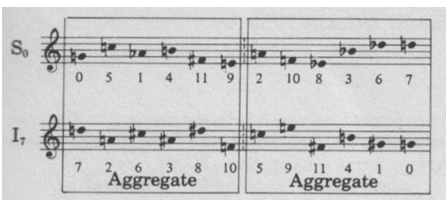


Fig. F.4.3: insieme semi-combinatorio.

retrogradazione-inversa) trasportata al livello opportuno (livello Tn), è detto **semi-combinatorio (**mostra un esempio di tale insieme è rappresentato in figura F.4.3). Esiste anche un ristretto numero di insiemi in grado di combinarsi con *tutte* le trasformazioni basilari all'opportuno livelli di trasposizione; tali insiemi sono detti **pan-combinatori**[23].

Anche da questi semplici esempi, si riesce a capire che la teoria combinatoria costituisce un vasto argomento di indagine. Per ogni singolo insieme, esistono vari tipi di insiemi che hanno più di un livello T di trasposizione per ognuna delle quattro trasformazioni basilari.

Inoltre le relazioni combinatorie si possono stabilire anche tra insiemi divisi in segmenti diversi dagli esacordi (ad esempio in quattro tricordi o tre tetracordi, ecc.). Oltre a ciò sono possibili anche divisioni asimmetriche dell'insieme come i tagli 5 + 7, 4 + 8, ecc. Tale complessità esula dagli obiettivi del presente lavoro. Sarà utile tuttavia, esaminare sei speciali insiemi definiti **insiemi sorgente** da Babbitt; essi sono di tipo pan-combinatorio su divisioni esacordali e sono di seguito elencati:

(A)	0	1	2	3	4	5	−	6	7	8	9	10	11
(B)	0	2	3	4	5	7	−	6	8	9	10	11	1
(C)	0	2	4	5	7	9	−	6	8	10	11	1	3
(D)	0	1	2	6	7	8	−	3	4	5	9	10	11
(E)	0	1	4	5	8	9	−	2	3	6	7	10	11
(F)	0	2	4	6	8	10	−	1	3	5	7	9	11

Tale tabulazione presenta diverse proprietà interessanti. In primo luogo, gli insiemi sono rappresentati soltanto *numericamente* e dunque possono essere riprodotti ad ogni livello T di trasposizione. In secondo luogo, è il **contenuto intervallare** (cioè il totale degli intervalli tra ogni possibile coppia e non solo tra elementi adiacenti) e non l'*ordine intervallare* che determina le proprietà combinatorie. Per questa ragione, negli insiemi sorgente gli esacordi di ogni insieme sono nella forma "più semplice" ovvero l'**ordine scalare (crescente)**. Le classi di note di ciascun esacordo possono essere riordinate internamente nel modo desiderato senza però che

23) Ad esempio, l'insieme [0, 5, 4, 2, 1, 3, 8, 6, 7, 11, 9, 10] forma aggregati con se stesso al livello di trasposizione T6,; con il suo retrogrado a T0; con il suo inverso a T11; con il suo retrogrado inverso a T5.

ciò faccia perdere le proprietà combinatorie di cui gli esacordi godono[24]. Per questo, ognuno degli insiemi nell'elenco sopra esposto rappresenta una famiglia di insiemi contenente 720 ordinamenti X 2 esacordi X 12 possibili livelli di trasposizione = **17.280** possibili insiemi.

Considerando tutti e sei gli insiemi sorgente, esistono complessivamente 6 X 17.280 (= 103.680) insieme esacordali pan-combinatori. Ecco perché la teoria di Milton Babbitt risulta essere estremamente proficua da un punto di vista compositivo: è possibile avere sotto mano un potente macchina per la generazione di note (o, come per lo stesso Babbitt, di altri parametri musicali come durate, intensità, ecc.) di cui è possibile però controllare il comportamento.

4.2.2 Utilità compositiva della teoria combinatoria.

Come è possibile utilizzare musicalmente le relazioni presenti nella teoria combinatoria? La risposta a questa domanda sta nel *desiderio di controllare il contenuto notale di una successione o di una progressione* così che l'armonia possa svilupparsi nel modo desiderato dal compositore. E' pratica comune utilizzare le relazioni combinatorie per realizzare progressioni mediante aggregati o insiemi secondari. Con tale sistema è possibile creare progressioni in cui è sempre rispettato il totale cromatico, ottenendo così una sorta di *analogia* con le progressioni del sistema tonale. Tuttavia, le progressioni nel sistema tonale significano soprattutto *movimento da un dominio ad un altro*; progressioni di aggregati o di insiemi secondari invece, significano solo *agglomerati* consecutivi di note che coprono il totale cromatico che si succedono.

Indipendentemente dal valore che si attribuisce a tali tipi di procedimenti, va comunque notato che le relazioni combinatorie rivestono grande importanza da un punto di vista *compositivo*: il compositore sarà costruttivamente disciplinato da esse. Per chi compone, tali relazioni avranno una grande importanza strutturale e metodologica, del tutto indipendente dal valore intrinseco del risultato.

---

24) Poiché un esacordo ha 6 note, vi saranno 6! = 720 possibili ordinamenti.

5. Conclusioni

5.1 Esiste una logica musicale?

E' difficile capire in quale misura l'atto artistico di creazione della conoscenza musicale (la composizione) sia *realmente* rappresentabile mediante il formalismo di uno degli approcci sopra esposti. Sicuro è però il fatto che un approccio che ha trovato controparte concreta nella composizione musicale è quello di tipo *algebrico*.
Lo stesso Schoenberg[25], nei lavori del periodo dodecafonico, adottò un approccio pseudo-combinatorio molto vicino a quello descritto. Ovviamente il suo modo di lavorare (come quello dei suoi allievi Berg e Webern) non era direttamente basato sulla risoluzione di equazioni algebriche ma era piuttosto centrato sull'uso di una forma di "grafismo" idoneo al calcolo delle permutazioni di matrici. Tale sistema *pratico* di calcolo delle matrici trova radici antiche[26] ed è sopravvissuto, con opportune modifiche, fino ai nostri giorni.
Intorno al 1950, è nata infatti in Europa (all'interno di un'importante scuola di composizione a **Darmstadt**, in Germania) una tendenza, figlia delle idee schoenbergiane, più formale di elaborazione della materia. Tale tendenza, una volta arrivata in America è stata perfezionata ed è stata organizzata in una forma molto simile a quella sopra descritta. Il principale compositore coinvolto in tale riorganizzazione si chiama **Milton Babbitt** ed è tuttora in attività.
In tre importanti articoli scritti intorno agli anni '60[27] Babbitt ha gettato le basi per la moderna **teoria combinatoria** della composizione. Nonostante il suo notevole spessore, non ha avuto il seguito aspettato probabilmente per ragioni di complessità intrinseca e di *rifiuto ideologico* da parte dei compositori (rifiuto motivato forse dall'eccessivo grado di astrazione richiesto dalla teoria stessa).
Quali siano state le cause della mancata diffusione della teoria combinatoria, non ha molta rilevanza per la ricerca condotta in questa sede. La cosa

---

25) Cfr. Cap. 2.
26) Si ricorda la "Tabula Mirifica" di A. Kircher, descritta nel Cap. 2.
27) Cfr. Bibliografia.

importante è notare piuttosto che se la *teoria costituisce un terreno fertile per la ricerca di una struttura logica della musica, è proprio perché nasce da necessità reali dei compositori ed è dunque molto legata al tipo di procedure utilizzate nella creazione della musica.* Mentre gli altri approcci esaminati (quello basato sui postulati, quello insiemistico e quello linguistico) sono nati come 'sovrastruttura' adatta all'esame di creazioni musicali compiute (e sono dunque posteriori alle creazioni stesse), la teoria combinatoria, in quanto *contestuale alla creazione stessa,* può essere uno strumento algoritmico usato dai musicisti e non solo uno strumento analitico fine a se stesso.
Se sia più appropriato cercare una struttura logica nell'ambito *procedurale* o in quello *analitico,* rimane domanda aperta. Forse poi, tale quesito è malposto. Per certi aspetti infatti, ciascuno degli approcci formali proposti in questo lavoro può risultare *più idoneo degli altri* per un particolare compito. Da un punto di vista compositivo, in ogni caso, la ricerca di una struttura di riferimento risulta indispensabile alla creazione stessa. Il processo creativo richiede un contesto entro cui svilupparsi, un confine entro cui potersi muovere. Tale confine può essere rappresentato da una struttura del tipo considerato che diventa così una linfa vitale per la composizione musicale.

6. Bibliografia

La prospettiva adottata nella presentazione dei fondamenti teorici della musica e alla teoria degli iperoni è dovuta a:

- Walter Branchi, Appunti non pubblicati sulla composizione
- Paul Hindemith, "The Craft of Musical Composition, Book I – Theory", nella traduzione di A. Mendel, Schott, 1970.

La visione dei sistemi musicali pitch-based è stata invece mutuata da:

- Charles Wourinen, Simple composition, Edition Peters, 1979.

La tesi della Langer è presente in:

- Susanne K. Langer, "A set of postulates for the logical structure of music", The Monist vol. xxxix, pp. 561 – 570, Chicago & London.

Per l'approccio insiemistico, oltre al suddetto articolo, si è fatto uso di:

- Lennart Aqvist, "Music from a Set-Theoretical Point of View, Interface, vol. 2 – 1973, pp. 1-22.
- Andres Wedberg, "Additive measures" in Philosofical Essays dedicated to Gunnar Aspelin, Gleerup, Lund, pp. 272 – 294.

L'approccio linguistico è invece basato su:

- Eli Blevis – Michael Jenkins – Edmund Robinson, "On Seeger's Music Logic", Interface, vol. 18 – 1989, pp. 9 – 31.
- Jos Kunst, "Making sense in music (I): the use of mathematical logic", Interface, vol. 5 – 1976, pp. 3 – 68.
- P. Martin-Löf, "On the meanings of the logical constants and the justification of the logical laws", conferenza al meeting Teoria della dimostrazione e Filosofia, Università degli studi di Siena.
- Curtis Roads, "Grammars as representations for music", in Roads C. & Strawn J. (editori), Foundations of computer music, Cambrige MA, 1985, MIT Press.
- Charles Seeger, "On the moods of a music logic", in Studies in Musicology, 1935 – 1975, Berkeley CA, University of California Press,

pp. 64 – 101. (Questa è una revisione di un articolo apparso nel 1960 in Journal of American Musical Society, XIII, pp. 224 – 261).

L'approccio algebrico, infine, è basato su:

- Herman Van San, “Sundry Notes Introductory to the Theoretical Mechanics of Mathematical Music”, Interface, vol. 2 – 1973, pp. 23 – 50.
- Per l'esame dei casi concreti, oltre che del già citato testo di Aqvist si è fatto uso di:
- Willi Apel, Harvard Dictionary of Music, 6° ed., Cambridge.
- Milton Babbitt, “Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants”, in Musical Quarterly 46, no. 2, 1960, nella ristampa “The collected essays of M. Babbitt”, Princeton University Press, 2003.
- Milton Babbitt, “Set Structure as Compositional Determinants”, idem.

7. Sommario

T1.1 Il processo di creazione della conoscenza musicale. 1

1.2 Strutturazione del lavoro. 2

2. PER UNA TEORIA DELLA COMPOSIZIONE 3

2.1 Le pietre miliari. 4

2.1.1 I costituenti del suono: gli ipertoni. 4

2.1.2 I costituenti del sistema musicale: triade e scala. 7

2.1.3 Il sistema temperato. 9

2.2 Lettura diacronica del cromatismo. 11

2.2.1 Monodia, polifonia, tonalità e cromatismo. 11

2.2.2 Analisi, percezione, composizione. 14

3. FORMULAZIONE DELLA SINTASSI LOGICA 17

3.1 I postulati di Susanne K. Langer. 18

3.1.1. Complessità e forma astratta. 18

3.1.2 I quindici postulati fondamentali. 20

3.1.3 L'interpretazione della nuova algebra. 22

3.1.4 I teoremi fondamentali della musica. 23

3.1.5 Alcune considerazioni. 26

3.2 La musica da un punto di vista insiemistico. 27

3.2.1 Sistemi musicali astratti. 28

3.2.2 Sistemi musicali astratti temporalmente quantificati. 33

3.2.3 Ritmo e melodia nei sistemi musicali astratti. 35

3.2.4 Sulla perfetta istanziazione di sistemi musicali astratti. *38*

3.2.5 Riepilogo delle nozioni introdotte. *40*

3.3 L'APPROCCIO LINGUISTICO. 40

3.3.1 Rilevanza delle logiche classiche. *41*

3.3.2 Sul significato delle logiche. *43*

3.3.3 Alcuni criteri generali per una logica musicale. *45*

3.3.4 Un esempio di logica musicale. *47*

3.3.5 Suono, simbolo e modo. *51*

3.3.6 Identità e unificazione. *56*

3.3.7 Un breve riassunto. *57*

3.4 L'APPROCCIO ALGEBRICO. 57

3.4.1 Specie dodecafoniche e modulazioni. *57*

3.4.2 Generazione delle specie. *58*

3.4.3 Gradi di libertà. *61*

3.4.4 Proprietà delle matrici. *63*

3.4.5 Le algebre P_x. *66*

4. ALCUNI CASI CONCRETI 69

4.1 ANALISI INSIEMISTICA. 69

4.2 LA TEORIA COMBINATORIA DI MILTON BABBITT. 73

4.2.2 Utilità compositiva della teoria combinatoria. *76*

5. CONCLUSIONI 77

5.1 ESISTE UNA LOGICA MUSICALE? 77

6. BIBLIOGRAFIA 79